3 Suites

3.1. Variations

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$:

- on peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes ;
- ou, dans le cas où $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

3.2. Suite arithmétique

reconnaître qu'une suite (u_n) est arithmétique	Pour tout entier naturel n, les variations absolues sont constantes : $u_{n+1} - u_n = \boldsymbol{a}$; le nombre $\boldsymbol{a}$ est la raison de la suite
formule du terme général	$u_n = u_0 + n\,\boldsymbol{a}$ ou pour p entier naturel avec u_p connu : $u_n = u_p + (n-p)\,\boldsymbol{a}$
variations	• u_0 quelconque, et $a = 0$ la suite (u_n) est constante • $a > 0$ la suite (u_n) est croissante • $a < 0$ la suite (u_n) est décroissante
somme des termes	$S = (\text{nombre de termes}) \times \left(\dfrac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 7$.
Alors $u_{n+1} - u_n = 7$; donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 7 et, pour tout n, $u_n = -1 + 7n$.
De plus, la raison $a = 7$ est positive, donc la suite (u_n) est croissante.

95 1 585 cartons sont stockés dans un entrepôt.
Dans 30 jours, cet entrepôt ne doit plus contenir que 25 cartons.
Chaque jour, on évacue le même nombre de cartons.
Combien de cartons doit-on évacuer par jour ?

96 Nicolas met, chaque jour, dans sa tirelire deux centimes de plus que la veille. Au départ, la tirelire contient 20 euros.
Quelle somme mettra-t-il dans sa tirelire le 30e jour ?
Quel est alors le montant de la tirelire ?

3.3. Suite géométrique

reconnaître qu'une suite (u_n) est géométrique	Pour tout entier naturel n, les variations relatives sont constantes : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \boldsymbol{b}$; le nombre $\boldsymbol{b}$ non nul est la raison de la suite
formule du terme général	$u_n = u_0 \times \boldsymbol{b}^n$ ou pour p entier naturel avec u_p connu : $u_n = u_p \times \boldsymbol{b}^{(n-p)}$
variations	• u_0 strictement positif et $b = 1$ la suite (u_n) est constante • $0 < b < 1$ la suite (u_n) est décroissante • $b > 1$ la suite (u_n) est croissante
somme des termes	$S = (\text{terme initial}) \times \left(\dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}\right)$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1{,}06^n$.
Alors $u_{n+1} = 1{,}06\,u_n$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $b = 1{,}06$ de terme initial $u_0 = 1{,}06^0 = 1$.
De plus, la raison $b = 1{,}06$ est supérieure à 1, donc la suite (u_n) est croissante.

97 Le budget de Florent pour ses vacances augmente chaque année de 1 %.
En 2005, il est de 2000 euros.
Quel sera son budget en 2010 ?

98 Le prix d'un article baisse chaque année pendant 10 ans de 1,2 %.
Le prix a-t-il baissé de 12 % au bout de 10 ans ?
Argumenter.

A. Reconnaissance de la nature d'une suite

aide en corrigés

1° Pour chacune des suites données par leur terme général, reconnaître si la suite est arithmétique, géométrique, ou si la suite est quelconque.

a) $u_n = 3(n+1) - 10$; b) $u_n = 3^{n+1} - 10$;

c) $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$;

d) $u_{n+1} = -2u_n + 3$ et $u_0 = 1$;

e) $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$;

f) $u_{n+1} = -u_n + 3$ et $u_0 = 1$.

2° On donne la formule de récurrence d'une suite : $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 100$.
Donner sa nature et sa raison.
Écrire le terme général en fonction de n.

3° On donne la formule de récurrence d'une suite : $u_{n+1} = 1{,}02\ u_n$ et $u_0 = 500$.
Donner sa nature et sa raison.
Écrire le terme général en fonction de n.

B. Calculs sur les suites arithmétiques

aide en fiche **TB23** et corrigés

1° Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $a = 1{,}5$ et de premier terme $u_1 = -30$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Montrer que $u_p - u_m = (p - m) \times a$.

c) Vérifier que $u_{10} = -16{,}5$ et en déduire u_{20}.

2° La suite (u_n) est définie par :
$$u_{n+1} = u_n - 4 \quad \text{et} \quad u_0 = 100.$$

a) Exprimer u_n en fonction de n. Calculer le terme u_{20}.

b) Déterminer l'entier n tel que $u_n = 0$.

3° Une suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et $u_6 = 7$.

a) Trouver la valeur du terme initial u_0.

b) En déduire u_n en fonction de n.

4° Sachant que la suite (u_n) est définie par :
$$u_n = 1300 + 50\,n,$$
calculer les sommes :

a) $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$.

b) $T = u_7 + u_8 + u_9 + \ldots + u_{26}$.

C. Suites géométriques : écriture

aide en fiche **TB23** et corrigés

1° On donne la raison b ou q et le premier terme d'une suite géométrique.
Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_4.

a) $b = 1{,}2$ et $u_0 = 100$; b) $q = \dfrac{2}{3}$ et $u_1 = 2$;

c) $q = -\dfrac{1}{2}$ et $u_2 = 4$;

d) $b = 0{,}8$ et $u_0 = 500$.

2° Les suites sont-elles géométriques ?
Si oui, préciser la raison et le terme u_0.

a) $u_n = -3 \times 2^n$; b) $u_n = 3 \times (-2^n)$;

c) $u_n = -5n + 30$; d) $u_n = 30 \times (5^n)$;

e) $u_n = -5^n \times 30$; f) $u_n = 30 \times (-5^n)$;

g) $u_n = 30 \times (-5)^n$; h) $u_n = 30 - 5^n$.

D. Somme de termes d'une suite géométrique

aide en fiche **TB23** et corrigés

1° On considère la suite géométrique (u_n) de raison $b = 2$ et de terme initial $u_0 = 1$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer la somme des 20 premiers termes en partant de u_0.

c) Exprimer en fonction de n la somme :
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

2° Soit la suite (u_n) définie par :
$$u_{n+1} = 1{,}2\ u_n \quad \text{et} \quad u_0 = 100.$$

a) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{20}.

b) Exprimer en fonction de n la somme :
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

c) Calculer cette somme pour $n = 20$.

E. Inéquation avec inconnue en exposant

aide chapitre 4, p. 96

1° Un capital de 1000 € est placé à intérêt composé au taux annuel de 3 %. Le capital acquis au bout de n années s'exprime par :
$$C(n) = 1000 \times 1{,}03^n.$$
À l'aide de la calculatrice, trouver le premier entier n tel que $C(n) > 2000$.
On pourra entrer en Y1 :

```
Y1=1000*1.03^X
```

puis regarder le tableau de valeurs par pas de 1.

2° Résoudre algébriquement :

a) $1{,}03^n > 2$; b) $0{,}95^n < 0{,}4$.

3° Les frais de stockage d'une entreprise diminuent chaque année de 5 %.
Ils étaient de 15 000 € en 2000.
Au bout de combien d'années ces frais ne sont-ils plus que de 6000 € ?

Activité 1. Trouver la suite

De nombreux tests proposent de compléter ainsi des suites « logiques » de nombres

1° Déterminer la suite de nombres que l'on obtient par chacun des procédés suivants (*on calculera six termes*), et essayer de décrire le procédé par une formule.

a) Chaque terme est obtenu en ajoutant 6 au précédent et en divisant le tout par 2 ; prendre 10 au départ.

b) Chaque terme est obtenu en ajoutant son rang au nombre précédent, sachant que le terme au départ, de rang 1, est 2.

c) Chaque terme est obtenu en ajoutant 5 aux termes de rang pair et en enlevant 5 aux termes de rang impair, sachant que le terme de rang 0 est 3 et celui de rang 1 est 33.

d) Chaque terme est obtenu en prenant 80 % du précédent et en lui ajoutant 20 % de celui encore avant (l'antéprécédent), les deux premiers étant 100 et 200.

2° On donne des suites finies de nombres. Pour chacune d'elles, trouver le terme manquant (...) possible, puis trouver un procédé qui relie ses termes ou leur rang.

a) 38 ; 29 ; 20 ; 11 ; (...) ;

b) 0 ; 5 ; 3 ; 8 ; 6 ; 11 ; (...) ; 14 ; 12 ;

c) 11 ; 33 ; (...) ; 77 ; 99 ; (...) ;

d) 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 17 ; 51 ; 53 ; (...) ;

e) 2 ; 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27 ; (...) ;

f) 0 ; 3 ; 9 ; 21 ; 45 ; 93 ; (...).

Activité 2. Et la suite à la calculatrice

À la calculatrice : on peut toujours calculer le terme d'une suite dont on connaît la formule explicite : $u_n = f(n)$

1° a) La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n+10}.$$

Entrer cette formule en Y1 en prenant X pour l'entier n.

```
Y1=(2^X)/(X+10)
```

Regarder le tableau des valeurs de 1 en 1 à partir de $X = 0$.

Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de cette suite et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Même question pour la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n - 0{,}5^n}{n+1}.$$

2° La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1} \quad \text{et} \quad u_0 = 2.$$

a) Calculer à la main u_1, u_2 et u_3. Donner le résultat en fraction irréductible.

b) Utiliser la touche ANS de la calculatrice pour vérifier les résultats précédents et obtenir les termes suivants.

```
2
                2
2/(Ans+1)▸Frac
              2/3
```

c) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur sa limite quand n tend vers $+\infty$?

d) Même question qu'en **c)** lorsque $u_0 = 1$, puis $u_0 = -2$, puis $u_0 = -1{,}5$.

Activité 3. Une propriété vraie pour tout n

1° Dans un village, la famille Palet a un caractère **héréditaire** : « tous les hommes issus de l'arrière grand-père Armand ont reçu de leur père la capacité de voir la nuit.
Ils sont nyctalopes. »

Axel Palet, 18 ans, est-il nyctalope ? Si Axel a un fils, le sera-t-il ?

Et Lou, la sœur d'Axel, a-t-elle cette capacité ?

Dans le village, Lucien Jobert, 75 ans, a cette capacité, son frère Jacques ne l'a pas.

Que peut-on en penser dans le village ?

2° Sur un chantier de construction d'un immeuble, les escaliers permettant de passer d'un étage à un autre sont déjà posés jusqu'au 4^e étage. Peut-on monter jusqu'au 4^e étage ? Argumenter la réponse.

1 Généralités sur les suites

1.1. Comportement global

$n \in \mathbb{N}$: n est un entier naturel

Autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m \leqslant u_n \leqslant M$

Définitions

Monotonie : une suite **monotone** est croissante ou décroissante :
- (u_n) est croissante lorsque, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- (u_n) est décroissante lorsque, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Suite majorée : une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant M$.

Suite minorée : une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant m$.

Suite bornée : une suite **bornée** est à la fois minorée et majorée.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie, pour tout n, par $u_n = 2 + \dfrac{5}{n+1}$.

La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x+1}$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc, pour tout n :

$$n+1 \geqslant n \Rightarrow f(n+1) \leqslant f(n), \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a $n+1 \geqslant 1$, donc $0 < \dfrac{5}{n+1} \leqslant 5 \Rightarrow 2 < 2 + \dfrac{5}{n+1} \leqslant 7.$

La suite (u_n) est donc bornée et, pour tout n, on obtient $u_n \in\,]2\,;7]$.

1.2. Comportement asymptotique

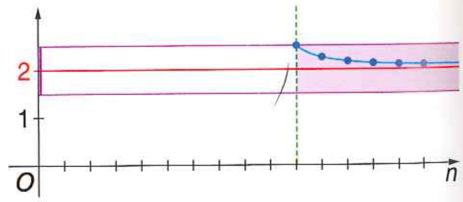
Cas à connaître : une suite qui n'a pas de limite diverge

Définitions

- Une suite (u_n) **converge**, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, où ℓ est un réel.
- Une suite **diverge**, si elle ne converge pas.

Exemples : Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \dfrac{5}{n+1} = 2$,
la suite (u_n) converge vers **2**.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 1 = +\infty$,
la suite (v_n) est telle que $v_n = n^2 + 1$ diverge.



On peut se donner une idée de la convergence de la suite (u_n) en pensant que, pour n'importe quel « **petit intervalle** » autour de **2**, on trouve tous les termes de la suite **à partir d'un certain rang**.

Démonstration : voir chapitre 6, p. 148

Voir **TB23**

Théorèmes

On considère les suites géométriques définies par $u_n = b^n$, avec $b \in \mathbb{R}$.

Si $b > 1$:	Si $0 < b < 1$:	Si $-1 < b < 0$:	Si $b < -1$:
$\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$	b^n n'a pas de limite

Une suite arithmétique diverge ; soit $v_n = a\,n + v_0$:
- si $a > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

A. Étudier le sens de variation d'une suite : $u_n = f(n)$

Méthode

• Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence :

$$u_{n+1} - u_n .$$

Pour écrire u_{n+1}, on remplace n dans u_n par $n+1$.

Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante.

• Lorsque u_n s'exprime en fonction de n, on écrit $u_n = f(n)$: le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ donne le sens de variation de la suite (u_n).

▶ Voir Chapitre 1, p. 12

Voir exercices 18 et 19

Énoncé :
Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^2}{n+2} .$$

Résolution : ▶ voir TB6

• $u_n = \dfrac{2^n}{n+2}$ pour tout n ; donc $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1+2} = \dfrac{2 \times 2^n}{n+3}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 \times 2^n}{n+3} - \frac{2^n}{n+2} = \frac{2\,(n+2) \times 2^n - (n+3)\,2^n}{(n+3)\,(n+2)}$$

$$= \frac{2^n\,(2\,(n+2) - (n+3))}{(n+3)\,(n+2)} = \frac{2^n\,(2n+4-n-3)}{(n+3)\,(n+2)} = \frac{2^n\,(n+1)}{(n+3)\,(n+2)} .$$

Comme n est un entier naturel, $(n \geqslant 0)$, donc tous les facteurs sont strictement positifs et la différence $\Delta u > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

• $v_n = \dfrac{n^2}{n+2} = f(n)$, avec $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Or $f'(x) = \dfrac{2x\,(x+2) - 1\,(x^2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

Sur $[0 ; +\infty[$, la dérivée est positive, donc la fonction f est croissante et la suite (v_n) est croissante.

B. Déterminer la convergence d'une suite ou la limite

Méthode

Pour étudier la limite d'une suite, on utilise les règles opératoires sur les limites de fonctions.

▶ Voir chapitre 3, p. 60

Lorsqu'une suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n, on a $u_n = f(n)$ et la limite de la fonction f en $+\infty$ est la limite de la suite (u_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{x \to +\infty} f(x) .$$

Si une forme $(b)^n$ apparaît, avec $b \in \mathbb{R}$, penser aux suites géométriques.

Voir exercices 20 à 22

Énoncé :
Soit les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n = \frac{2n^2-3}{n^2+1}, \quad v_n = 1{,}4 \times 0{,}8^n - 1{,}05^n \quad \text{et} \quad w_n = 12 - 8\,(-0{,}75)^n .$$

Résolution :

• $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$.

La suite (u_n) converge vers 2.

• $v_n = 1{,}4 \times 0{,}8^n - 1{,}05^n$.

$0{,}8 \in \,]0 ; 1[$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$; donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1{,}4 \times 0{,}8^n = 0$.

$1{,}05 > 1$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1{,}05^n = +\infty$; donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -1{,}05^n = -\infty$.

Ainsi, par somme, on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1{,}4 \times 0{,}8^n - 1{,}05^n = -\infty$.

La suite (v_n) diverge.

• $w_n = 12 - 8\,(-0{,}75)^n$.

$-0{,}75 \in \,]-1 ; 0[$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (-0{,}75)^n = 0$; donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -8\,(-0{,}75)^n = 0$.

Ainsi, par somme, on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 12 - 8\,(-0{,}75)^n = 12$.

La suite (w_n) converge vers 12.

⚠ $(-0{,}75)^n \neq -0{,}75^n$ et $12 - 8\,(-0{,}75)^n \neq 4\,(-0{,}75)^n$.

2 Suite définie par $u_{n+1} = a\,u_n + b$

Autre nom : on nomme une telle suite : arithmético-géométrique

Définition

La suite (u_n) définie, pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = a \times u_n + b$ et le terme initial u_0, avec a et b deux réels, est une suite récurrente d'ordre 1.

Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique. Elle est liée à la fonction affine :

$$f : x \longmapsto ax + b.$$

Sens de variation

- Pour $a > 0$, la fonction f **est croissante** et la suite (u_n) est **monotone** :
  - si $u_0 \leqslant u_1$, alors $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ et par itération $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc (u_n) est croissante ;
  - si $u_0 \geqslant u_1$, alors $f(u_0) \geqslant f(u_1)$ et par itération $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$, donc (u_n) est décroissante.
- Pour $a < 0$, la fonction f est décroissante et la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exemple et représentation

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = -0{,}75\,u_n + 21 \quad \text{et} \quad u_0 = 4.$$

Dans un repère orthonormal, on trace la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction :

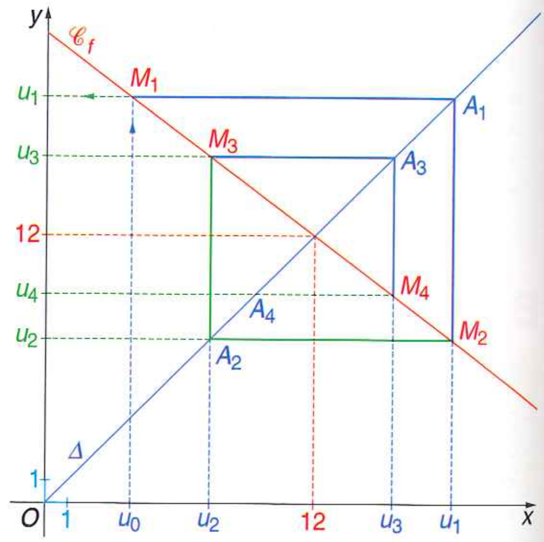
$$f : x \longmapsto -0{,}75\,x + 21$$

et la droite Δ d'équation $\boldsymbol{y = x}$.

On place **u_0 sur l'axe des abscisses.**

Comme $u_1 = -0{,}75\,u_0 + 21$, alors u_1 est l'image de u_0 par f.
Ainsi, **u_1 est l'ordonnée** du point M_1 de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0.

Pour obtenir u_2, on rabat u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant le point A_1 de la droite Δ et $u_2 = -0{,}75\,u_1 + 21 = f(u_1)$.



u_2 est l'ordonnée du point M_2 de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_1 ... on poursuit le procédé pour obtenir u_2 ; u_3 ; u_4 ... sur l'axe des abscisses.

D'après la représentation, la suite (u_n) **semble** converger vers 12.

Une telle représentation est utilisée pour toutes les suites récurrentes (u_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

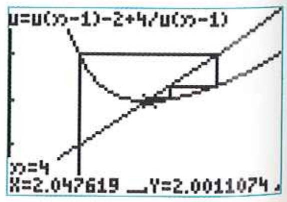
$$u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I.

Elles s'obtiennent facilement à l'aide des calculatrices graphiques ;

ici $u_{n+1} = u_n - 2 + \dfrac{4}{u_n}$ et $u_0 = 1$.

Voir logiciels, p. 246



Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{avec tous ses termes } u_n \text{ dans } I.$$

Si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

C. Étudier le sens de variation d'une suite récurrente

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite définie par :

$u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0 donné,

on regarde le sens de variation de la fonction f et on compare les premiers termes.

On peut vérifier à la calculatrice :

```
4
                4
2*Ans-1
                7
               13
               25
```

```
.5
               .5
Ans-1+1
                3
      1.333333333
             1.75
      1.571428571
```

Voir exercices 44 à 46

Énoncé : On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2\,u_n - 1 \\ u_0 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{n+1} = 0{,}6\,v_n + 4 \\ v_0 = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{n+1} = \dfrac{1}{w_n} + 1 \\ w_0 = 0{,}5 \end{cases}$$

Étudier leur sens de variation.

Résolution :

• $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 4$;
donc $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7$ et $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13$.
On remarque que $u_0 \leqslant u_1$.
La fonction $f : x \longmapsto 2x - 1$ est croissante, donc :

$$f(u_0) \leqslant f(u_1) \text{, c'est-à-dire } u_1 \leqslant u_2 \,;$$

de même $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ ... $f(u_{n-1}) \leqslant f(u_n)$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante.

• $v_{n+1} = 0{,}6\,v_n + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = 20$; donc :

$$v_1 = 0{,}6 \times 20 + 4 = 16 \text{ et } v_2 = 0{,}6 \times 16 + 4 = 13{,}6\,.$$

On remarque que $v_0 \geqslant v_1$.
La fonction $x \longmapsto 0{,}6\,x + 4$ est croissante, donc les images sont rangées dans le même ordre ; ainsi, par itération, $v_n \geqslant v_{n+1}$.
La suite (v_n) est donc décroissante.

• $w_{n+1} = \dfrac{1}{w_n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $w_0 = 0{,}5$; donc $w_1 = \dfrac{1}{0{,}5} + 1 = 3$;

$w_2 = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$; $w_3 = \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{7}{4}$; $w_4 = \dfrac{4}{7} + 1 = \dfrac{11}{7}$; ...

La suite (w_n) n'est pas monotone.

D. Utiliser une suite géométrique pour démontrer

Méthode

Pour démontrer des propriétés sur une suite récurrente, on utilise une suite auxiliaire (v_n), **posée dans l'énoncé**.

Pour montrer que cette suite (v_n) est géométrique, on montre que :

$$v_{n+1} = \boxed{b} \times v_n\,,$$

où b est un réel à trouver.

Voir exercices 47 et 48

Énoncé : On reprend la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = -\,0{,}75\,u_n + 21 \quad \text{et} \quad u_0 = 4\,.$$

On pose $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Démontrer que (v_n) est géométrique et en déduire v_n, puis u_n en fonction de n.
En déduire la convergence de la suite (u_n).

Résolution :

On a $v_n = u_n - 12$ pour tout n ; donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 12$.
On remplace u_{n+1} par $-\,0{,}75\,u_n + 21$, d'après la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = -\,0{,}75\,u_n + 21 - 12 = -\,0{,}75\,u_n + 9 = -\,0{,}75\,(u_n - 12)\,,$$

car $\dfrac{9}{-\,0{,}75} = -\,12$.

Donc $v_{n+1} = \boxed{-\,0{,}75}\;v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Ainsi la suite (v_n) est géométrique, de raison $b = -\,0{,}75$.

Comme $v_0 = u_0 - 12 = 4 - 12 = -\,8$, alors $v_n = v_0 \times b^n = -\,8\,(-\,0{,}75)^n$.

De plus $v_n = u_n - 12 \iff u_n = v_n + 12$.

Ainsi $u_n = -\,8\,(-\,0{,}75)^n + 12 = 12 - 8\,(-\,0{,}75)^n$.

D'après l'application **B.**, p. 241, cette suite (u_n) converge vers 12.

3 Suite définie par $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$

Définition

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

et les deux termes initiaux u_0 et u_1, avec a et b deux nombres.

Cette suite est une suite récurrente d'ordre 2.

Autrement dit :
u_0 et u_1 sont les conditions initiales

Cette suite n'est pas de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Elle fait appel aux deux termes précédents.

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_{n+2} = 0{,}3\,u_{n+1} + 0{,}7\,u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et $u_0 = 4$ et $u_1 = 6$.
On veut calculer les premiers termes :
$u_2 = 0{,}3 \times u_1 + 0{,}7\,u_0 = 0{,}3 \times 6 + 0{,}7 \times 4 = 4{,}6$;
$u_3 = 0{,}3\,u_2 + 0{,}7\,u_1 = 0{,}3 \times 4{,}6 + 0{,}7 \times 6 = 5{,}58$;
$u_4 = 0{,}3\,u_3 + 0{,}7\,u_2 = 0{,}3 \times 5{,}58 + 0{,}7 \times 4{,}6 = 4{,}894$.
La suite ne semble pas monotone.

Utilisation du calcul matriciel : Pour calculer un terme de cette suite, sans calculer tous les termes précédents, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_0 = u_1 \quad \text{pour tout } n.$$

Alors $u_{n+2} = v_{n+1}$ et $u_{n+2} = 0{,}3\,u_{n+1} + 0{,}7\,u_n$ s'écrit $v_{n+1} = 0{,}3\,v_n + 0{,}7\,u_n$.

Ainsi $\begin{cases} u_{n+1} = 0 \times u_n + 1 \times v_n \\ v_{n+1} = 0{,}7 \times u_n + 0{,}3 \times v_n \end{cases}$; en posant $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}$ et $P_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$;

ce système se traduit par la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow P_{n+1} = M \times P_n.$$

D'où, par itération, $P_n = M^n \times P_0$.

Pour $P_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, on obtient $P_{11} \approx \begin{bmatrix} 5{,}1997 \\ 5{,}1602 \end{bmatrix}$;

d'où $u_{11} \approx 5{,}2$.

```
[A]
            [[0  1 ]
             [.7 .3]]
[A]^11*[B]
  [[5.1997332256]
   [5.160186721]]
```

4 Raisonnement par récurrence

Théorème

Pour démontrer qu'une formule (ou une propriété) dépendant d'un entier naturel n est vraie, pour tout entier naturel n, on procède en deux étapes :

- on montre que la **formule est vérifiée pour le rang initial** (en général, $n = 0$) ;
- on montre que la **formule est héréditaire**, c'est-à-dire :
  - **on suppose que la formule est vraie au rang p** ;
  - **on démontre qu'elle est alors vraie au rang $p + 1$**.

Alors on peut **conclure** que la **formule est vraie pour tout entier naturel n**.

⚠ La vérification au rang initial est très importante !
Pour un caractère héréditaire tel que :
« si le père a ce caractère, alors son fils a ce caractère »,
il faut bien qu'un ancêtre ait ce caractère au départ !
Sinon, aucun descendant de la famille ne l'a !

E. Établir la relation d'une suite d'ordre 2

Méthode

Pour une suite récurrente d'ordre 2, bien analyser l'énoncé pour calculer les premiers termes et établir la relation de récurrence.

Reprendre pour cela les phrases de l'énoncé.

On peut vérifier à la calculatrice.

▶ Voir logiciels, p. 246.

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
\u(n)■1.5*u(n-1)
-.5*u(n-2)
 u(nMin)■{4,5}
```

Voir exercices 61 à 64

Énoncé : Dans une agence de voyage, l'étude de la clientèle d'une année sur l'autre montre que, chaque année, on retrouve le nombre de clients de l'année précédente, augmenté de 50 %, mais on perd un nombre de clients correspondant à 50 % des clients d'il y a deux ans.
Au départ de l'étude, il y avait 5 000 clients, puis 4 000 clients l'année suivante.
On note u_n le nombre de clients l'année n (en milliers) et $u_0 = 5$ et $u_1 = 4$.
Calculer u_2 et u_3.
Établir la relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

Résolution :

$u_2 = u_1 + 0{,}5\,u_1 - 0{,}5\,u_0 = 4 + 0{,}5 \times 4 - 0{,}5 \times 5 = 3{,}5$.

$u_3 = u_2 + 0{,}5\,u_2 - 0{,}5\,u_1 = 3{,}5 + 0{,}5 \times 3{,}5 - 0{,}5 \times 4 = 3{,}25$.

Chaque année $n+2$, avec $n \geqslant 0$, le nombre de clients u_{n+2} est égal au nombre de clients l'année précédente $n+1$ augmenté de 50 %, soit :

$$u_{n+1} + 0{,}5\,u_{n+1},$$

diminué de 50 % du nombre de clients l'année n, soit $0{,}5\,u_n$.

D'où $u_{n+2} = u_{n+1} + 0{,}5\,u_{n+1} - 0{,}5\,u_n = \mathbf{1{,}5\,u_{n+1} - 0{,}5\,u_n}$.

F. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence

Méthode

Pour une suite récurrente d'ordre 1, on vérifie la formule pour le rang initial, on suppose qu'elle est vraie pour le rang p et on la démontre pour le rang $p+1$.

Pour une suite récurrente d'ordre 2, on vérifie la formule pour les deux conditions initiales, on suppose qu'elle est vraie pour les rangs p et $p+1$, et on la démontre pour le rang $p+2$.

On peut alors conclure que la formule est vraie pour tout entier n.

Voir exercices 70 à 72

Énoncé : On reprend la suite (u_n) de l'application **E**.
a) Démontrer que $u_n = 3 + 2 \times 0{,}5^n$ pour tout entier naturel n.
b) En déduire la limite de cette suite (u_n) et en donner une interprétation concrète.

Résolution :

a) • **Conditions initiales :**

$3 + 2 \times 0{,}5^0 = 3 + 2 \times 1 = 5 = \mathbf{u_0}$

et $3 + 2 \times 0{,}5^1 = 3 + 2 \times 0{,}5 = 4 = \mathbf{u_1}$.

Donc la formule est **vraie pour $n = 0$ et $n = 1$**.

• On **suppose** que la formule est vraie aux rangs p et $p+1$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u_p = 3 + 2 \times 0{,}5^p} \quad \text{et} \quad \mathbf{u_{p+1} = 3 + 2 \times 0{,}5^{p+1}}.$$

Or, d'après la relation de récurrence établie dans l'application **E** :

$$\begin{aligned} u_{p+2} = 1{,}5\,u_{p+1} - 0{,}5\,u_p &= 1{,}5\,(3 + 2 \times 0{,}5^p \times 0{,}5) - 0{,}5\,(3 + 2 \times 0{,}5^p) \\ &= 4{,}5 + 1{,}5 \times 0{,}5^p - 1{,}5 - 0{,}5^p \\ &= 4{,}5 - 1{,}5 + 0{,}5^p\,(1{,}5 - 1) = 3 + 0{,}5^p \times 0{,}5 = 3 + 0{,}5^{p+1}, \end{aligned}$$

or $3 + 2 \times 0{,}5^{p+2} = 3 + 2 \times 0{,}5^{p+1} \times 0{,}5 = 3 + 0{,}5^{p+1}$.

Ainsi, on obtient $u_{p+2} = 3 + 2 \times 0{,}5^{p+2}$ ce qui signifie que la formule est vraie au rang $p+2$.

• On conclut que la formule est vraie pour tout entier n.

b) Comme $0{,}5 \in]0\,;1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$;

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times 0{,}5^n = 0$ et, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + 2 \times 0{,}5^n = 3$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers 0, ce qui signifie que le nombre de clients, à long terme, va se stabiliser autour de 3 000 clients.

3. Approfondissement

1. Trouver la suite

***Pour les exercices* 23 *et* 24,** trouver le terme manquant de chaque suite finie. Décrire le procédé permettant de passer d'un terme à un autre, ou écrire une formule donnant un terme en fonction du rang ou du précédent.

23 a) 0 ; 5 ; 3 ; 8 ; 6 ; 11 ; .?. ; 14 ; 12 .

b) 1 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; 37 ; .?.

c) 0 ; 3 ; 9 ; 21 ; 45 ; 93 ; .?.

24 a) – 2 ; 1 ; 7 ; 19 ; 43 ; 91 ; .?.

b) $2 ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{3} ; \frac{8}{5} ; \frac{13}{8}$; .?.

c) $2 ; 5 ; \frac{7}{2} ; \frac{17}{4} ; \frac{31}{8} ; \frac{65}{16} ; \frac{127}{32}$; .?.

2. Sens de variation

25 1° Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 .$$

2° Faire une conjecture sur le sens de variation de cette suite. La démontrer.

26 Même exercice pour la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n - 3 .$$

27 a est un réel quelconque. Soit (u_n) telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n - 1 .$$

Établir que la suite (u_n) est :

a) constante, si $a = 1$. b) croissante, si $a = 2$.

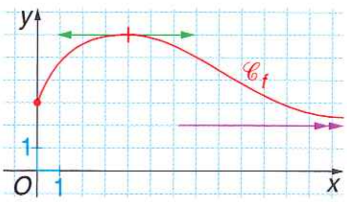
c) décroissante, si $a = 0$.

28 Étudier les variations des suites définies par :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 \\ u_0 = 0{,}5 \end{cases}$.

3. Suite majorée ou minorée

29 On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ et représentée ci-dessous.



a) Dresser le tableau complet des variations de f.

b) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Justifier que cette suite est bornée.

30 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 3 \quad \text{pour } n \geqslant 1 .$$

Montrer que cette suite est bornée.

31 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 3} ,$$

où (u_n) est une suite telle que, pour tout n, $u_n \in [0 ; 2]$.

a) Vérifier que $v_n = 1 + \dfrac{3}{u_n - 3}$.

b) À l'aide des fonctions usuelles, démontrer que, pour tout n :

$$-2 \leqslant v_n \leqslant 0 .$$

32 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} .$$

a) Montrer que, si $x < 3$, alors $\dfrac{9}{6 - x} < 3$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n < 3$.

b) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. Convergence

33 Étudier la convergence des suites données par leur terme général :

$$u_n = 25\left(\frac{1}{5}\right)^n - 0{,}9^n \quad \text{et} \quad v_n = 27\left(\frac{7}{3}\right)^{n+1} - 0{,}51^n .$$

34 La suite (u_n) est une suite géométrique, de terme général $u_n = 100 \times 0{,}95^n$.

1° a) Étudier la convergence de cette suite.

b) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ à 0,1 près.

2° a) Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

35 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 0{,}9^n$.

a) Étudier le sens de variation et la convergence de cette suite.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 0{,}99$.

36 Après l'étude du chapitre **4**, p. 88.

Soit (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

1° a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et le signe de u_n pour $n \geqslant 1$.

b) Étudier la limite de la suite (u_n).

2° On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Calculer S_n en fonction de n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

5. Petits problèmes

37 Le revenu disponible des ménages, en France, était de 951,3 milliards d'euros en 2001 et de $988{,}1 \times 10^9$ euros en 2002.

1° Justifier que le revenu a augmenté de 3,87 % entre 2001 et 2002.

2° On fait l'hypothèse que le revenu progresse chaque année depuis 2000 de 3,87 %.
On note u_n le revenu de l'année $2000 + n$ en milliards d'euros. Ainsi $u_1 = 951{,}3$.

a) Exprimer u_n en fonction de n. Calculer le revenu que l'on peut prévoir en 2010.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année où le revenu devient supérieur à $1{,}150 \times 10^{12}$ €.

38 On place un capital initial C_0 de 10 000 € à intérêts composés au taux annuel de 5 %.
Soit C_n le capital dont on dispose au bout de n années.

1° Montrer que (C_n) est une suite géométrique.
Donner sa raison. Calculer C_7.

2° Déterminer algébriquement le nombre d'années de placement tel que le capital acquis dépassera le triple du capital initial.
Le résultat dépend-il du capital C_0 ?

39 Chaque jour, une usine fabrique des ordinateurs et les stocke. La fabrication était de 1500 le premier jour.
Elle diminue chaque jour de 8 %.
On note u_n la production journalière le n-ième jour, avec $u_1 = 1500$.

a) Établir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. En donner le sens de variation. Calculer u_{10}.

b) Déterminer algébriquement au bout de combien de jours le nombre d'ordinateurs fabriqués dans la journée devient inférieur à 100.

c) Calculer le nombre total d'ordinateurs fabriqués, et stockés, au bout de 20 jours.

40 Une entreprise produit 2 000 pièces la 1[re] année et la production augmente de 4 % l'an.

1° a) Calculer la production de la 4[e] année.

b) Si u_n est la production la n-ième année, avec $u_1 = 2\,000$, exprimer u_n en fonction de n.

2° a) Déterminer la production totale (cumulée) sur les quatre premières années.

b) Exprimer la production totale P_n au bout de n années en fonction de n.

c) Déterminer l'année n à partir de laquelle la production totale dépassera 40 000 pièces.

3° Chaque année, le prix unitaire d'une pièce diminue de 5 %. Il est de 8 € la première année.

a) Calculer le prix unitaire la 4[e] année et le chiffre d'affaires de cette entreprise cette 4[e] année.

b) On note v_n le prix la n-ième année, avec $v_1 = 8$ et C_n le chiffre d'affaires annuel.
Exprimer v_n en fonction de n, puis C_n.

c) Déterminer la limite du chiffre d'affaires annuel C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. SUITE DÉFINIE PAR $u_{n+1} = a\,u_n + b$

1. Q.C.M. et VRAI-FAUX

41 **Vrai ou Faux.** Corriger les réponses fausses.

1° Si $u_{n+1} = 3\,u_n - 2$ et $u_0 = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

2° Si $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\,u_n - 1$ et $u_0 < 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

3° La suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 0$, pour :
$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\,u_n - 1$
est aussi définie, pour $n \geqslant 1$, par :
$u_1 = 5$ et $u_n = 2\,u_{n-1} - 1$.

42 **Vrai ou Faux.** Corriger les réponses fausses.
On considère une suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$.

1° Si $u_{n+1} = 0{,}3\,u_n - u_n$, alors la suite est géométrique.

2° Si $u_{n-1} = 2\,u_n - 6$, cela signifie que $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$.

3° Si $u_{n+1} = -\,0{,}5\,u_n + 20$ et $u_0 = 4$, alors $u_2 = 11$.

4° Si $u_{n+1} = -\,0{,}8\,u_n + 9$ et $u_0 = 7{,}5$, alors u_3 est l'ordonnée du point de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -\,0{,}8\,x + 9$ d'abscisse 6,6.

43 **Q.C.M.** Trouver la **seule** bonne réponse.

1° La suite dont le procédé est « on augmente de 10 % le terme précédent et on enlève 5 » s'écrit :
ⓐ $u_{n+1} = 0{,}1\,u_n - 5$ ⓑ $u_n = 1{,}1\,u_{n-1} - 5$
ⓒ $u_{n+1} = 0{,}1\,(u_n - 5)$ ⓓ $u_{n+1} = u_n + 10 - 5$

2° La suite dont le procédé est « on enlève 2 au terme précédent, puis on enlève 20 % » s'écrit :
ⓐ $u_{n+1} = u_n - 2 - 20$ ⓑ $u_{n+1} = (u_n - 2) - 0{,}2\,u_n$
ⓒ $u_{n+1} = 0{,}8\,(u_n - 2)$ ⓓ $u_{n+1} = 0{,}2\,(u_n - 2)$

2. Applications directes

C. Étudier le sens de variation d'une suite récurrente, p. 243

44 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = -3\,u_n + 10 \quad \text{et} \quad u_0 = 2\,;$$
$$v_{n+1} = 3\,v_n - 10 \quad \text{et} \quad v_0 = 2\,.$$

Étudier le sens de variation de ces suites.

45 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}\,.$$

1° a) Justifier que la fonction $f : x \longmapsto 2 - \dfrac{3}{x+2}$ est croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

b) Si $x \in [1\,;2]$, démontrer que $f(x) \in [1\,;2]$.

2° a) Étudier le sens de variation de la suite.

b) À l'aide de la calculatrice, vers quel nombre semble converger cette suite ?

46 Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -0{,}8\,u_n + 18$ et $u_0 = 4$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [4\,;15]$.

D. Utiliser une suite géométrique pour démontrer, p. 243

47 On considère la suite définie par :

$$u_{n+1} = -3\,u_n + 4 \quad \text{et} \quad u_0 = 2\,.$$

1° a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ?

2° On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

a) Calculer v_0. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n.

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. *On précisera la raison.*

c) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

48 Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 1) \quad \text{et} \quad u_0 = 4\,.$$

1° Calculer u_1, u_2 et u_3.

2° On pose $v_n = 2\,u_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et le premier terme v_0.

b) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Approfondissement

I. Représentation

49 Dans une maison de vente par correspondance, on s'est aperçu que, chaque année, le nombre de clients diminuait de 20 %, mais on gagnait 400 clients nouveaux.
On note u_n le nombre de clients chaque année.
Au début de l'enquête, le nombre de clients était de 1 000.

a) Établir la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

b) Dans un repère orthonormal d'unité 1 pour 200, construire les premiers termes de cette suite, à l'aide des droites $\mathscr{D}$ d'équation $y = 0{,}8\,x + 400$ et Δ d'équation $y = x$.
Vers quel nombre semble converger la suite (u_n) ?

50 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}\,u_n + 2\,.$$

1° Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer les droites $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{3}{4}\,x + 2$ et Δ d'équation $y = x$.
Déterminer leur point d'intersection A.

2° a) Calculer à la main u_1, u_2 et u_3, et en donner une écriture fractionnaire.

b) Placer u_1 et u_2 et construire u_3 puis u_4.

3° On pose $v_n = u_n - 8$ pour tout entier n.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

c) En déduire le sens de variation de (u_n) et sa limite.

type BAC **51** Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}\,u_n + 3 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}\,.$$

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}\,x + 3\,.$$

1° a) Tracer la représentation graphique de f et la droite Δ d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

b) Soit A le point d'intersection de ces deux droites. Déterminer les coordonnées de A.

c) Utiliser le graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses. Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

2° Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel, par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n\,.$$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. *On précisera la raison et son premier terme v_0.*

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que :

$$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4\,.$$

c) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1. Q.C.M. ou VRAI-FAUX

69 **Vrai ou Faux.** Justifier la réponse.

1° Pour démontrer par récurrence une propriété sur tout $\mathbb{N}$, il faut que cette propriété soit vérifiée pour $n = 0$.

2° Dans un raisonnement par récurrence, il suffit de prouver que, si la propriété est vraie pour le rang p, alors elle est vraie pour le rang suivant $p + 1$.

3° Dans un raisonnement par récurrence d'ordre 2 sur tout $\mathbb{N}$, il faut vérifier la propriété pour $n = 0$ et $n = 1$.

4° On a une suite (u_n) telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$u_n = 0{,}5^n + 3.$$
Pour montrer que $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1{,}5$, on doit appliquer un raisonnement par récurrence.

5° On a une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que :
$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \quad \text{et} \quad u_0 = 2$$
et on sait que, pour tout n, on a $1 < u_n \leqslant 2$.
Pour montrer que la suite est décroissante, on démontre par récurrence la propriété :
$$u_{n+1} \leqslant u_n \quad \text{pour tout entier } n.$$

2. Applications directes

F. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, p. 245

70 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$u_{n+1} = 1{,}2\, u_n - 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 10.$$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :
$$u_n = 15 - 5 \times 1{,}2^n.$$
En déduire le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

71 Soit la suite (u_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par :
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\, u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$
a) Calculer u_1 et u_2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite, et sa convergence.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :
$$u_n = 4 - \frac{3}{4^n}.$$
c) En déduire le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

72 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_{n+2} = 2{,}5\, u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad u_0 = 4\,;\ u_1 = 5.$$
1° Calculer u_2 et u_3.

2° Soit (s_n) la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :
$$s_n = 2 \times 0{,}5^n + 2 \times 2^n.$$
a) Vérifier que $s_0 = 4$ et $s_1 = 5$.

b) On suppose que la suite (s_n) vérifie la relation de récurrence de la suite (u_n) aux rangs p et $p + 1$.
Démontrer que cette suite vérifie cette relation au rang $p + 2$.

c) Conclure.

3. Approfondissement

I. Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

73 On considère la suite (u_n) telle que :
$$u_0 = 0{,}5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (u_n)^2.$$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :
$$0 < u_n < 1.$$

74 Soit la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$
1° Calculer u_1, u_2 et u_3.
Vérifier qu'ils appartiennent à l'intervalle $[0\,;4[$.

2° Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$0 \leqslant u_n < 4.$$
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3° En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x + 12}$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

75 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$
1° Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.
Quel semble être le sens de variation de cette suite ?
Le démontrer par récurrence.

2° Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

3° On admet que la suite (u_n) converge.

Résoudre l'équation $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

76 Pour une production, on utilise, chaque mois n, un capital bancaire u_n, en dizaines de milliers d'euros.
La banque permet un découvert.
Au départ, le capital est de 20 000 €, soit $u_0 = 2$.
Chaque mois, le gestionnaire utilise 60 % du capital et demande 120 000 € à son banquier.

1° Calculer u_1 et u_2. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}6\, u_n - 1{,}2$.
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante en utilisant une fonction affine.

2° Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > -3$.

3° On admet qu'une suite décroissante minorée converge.

a) Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on note ℓ.

b) Résoudre $\ell = 0{,}6\,\ell - 1{,}2$. Conclure pour la suite.

c) En déduire le découvert bancaire à long terme.

2. Suite $u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$

77 Le prix d'un article s'établit pour chaque mois en fonction des prix des deux mois précédents suivant un phénomène récurrent.
On a établi le modèle suivant :
« chaque mois, le prix est celui du mois précédent qui, par un effet de retard, subit une diminution correspondant à 9 % du prix pratiqué deux mois avant ».
On note u_n le prix, en euros, le mois n et on admet que :
$$u_0 = 11 \quad \text{et} \quad u_1 = 7{,}5.$$

1° Justifier la relation de récurrence :
$$u_{n+2} = u_{n+1} - 0{,}09\, u_n.$$
Calculer u_2 et u_3.

2° On pose, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1}$ et $P_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.

a) Déterminer avec soin la matrice M telle que :
$$P_{n+1} = M \times P_n.$$

b) Donner P_0. En déduire P_n en fonction de M et P_0.
Calculer alors le prix le mois $n = 10$.

3° a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :
$$u_n = 8 \times 0{,}9^n + 3 \times 0{,}1^n.$$

b) En déduire le sens de variation et la convergence de cette suite (u_n).
Que peut-on dire de cette suite de prix à long terme ?

c) On estime que ce modèle n'est plus valable dès que le prix est en dessous de 3 €. À l'aide de la calculatrice, trouver le mois n à partir duquel ce modèle n'est plus valable.

78 On étudie l'évolution de la population d'une ville, où il y a une très grande mobilité des personnes.
On a ainsi pu établir le modèle suivant.
Chaque année, la population augmente de 90 % de la population de l'année précédente, mais diminue de 90 % de la population deux ans avant.

L'année de départ la population est de 100 000 habitants et l'année suivante de 130 000.

On note u_n la population l'année n, en centaines de milliers d'habitants.
Ainsi $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}3$.

1° Calculer u_2 et u_3.
Établir la relation de récurrence $u_{n+2} = 1{,}9\, u_{n+1} - 0{,}9\, u_n$.

2° On pose, pour tout entier n :
$$v_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad P_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer avec soin la matrice M telle que :
$$P_{n+1} = M \times P_n.$$

b) En déduire P_n en fonction de M et P_0.
Calculer la population de cette ville dans 10 ans, arrondie à mille habitants.

c) À l'aide du calcul de P_n, quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

3° a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :
$$u_n = 4 - 3 \times 0{,}9^n.$$

b) En déduire le sens de variation de cette suite, puis sa limite.
En donner une interprétation concrète, si ce modèle reste valable à long terme.

c) Déterminer algébriquement l'année à partir de laquelle la population de cette ville dépasse 350 000 habitants.

79 Dans une usine, on fabrique des produits chimiques.
Une des matières premières est commandée chaque mois.
Les contraintes de la production montrent que l'on doit commander 55 % de plus que la commande du mois précédent, mais le stockage nécessite de diminuer cette commande de 60 % de la commande deux mois avant.
Pour démarrer la production, les commandes faites les deux premiers mois sont de 300 tonnes, puis de 230 tonnes.
On note u_n la masse (en tonnes) de matières commandées le mois n. Ainsi $u_0 = 30$ et $u_1 = 23$.

1° a) Calculer u_2 et u_3.
Quel semble être le sens de variation de cette suite de commandes ?

b) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n.

2° a) Démontrer par récurrence que :
$$u_n = 10 \times 0{,}8^n + 20 \times 0{,}75^n.$$

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n), puis la limite de la suite (u_n).

c) Interpréter concrètement ces résultats pour les commandes faites par cette usine.

d) À l'aide de la calculatrice, trouver à partir de combien de mois la commande devient inférieure à dix tonnes.

5. EXERCICES DE SYNTHÈSE

80 Un grand laboratoire décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit.
Pour cela, il planifie sur cinq ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.
On désigne par d_n et v_n les indices de demande et du prix de vente lors du n-ième trimestre.
On pose $v_0 = 100$ et on a :

$$\begin{cases} d_n = \dfrac{400 - v_n}{3} \\ v_n = 0{,}8\ v_{n-1} + 0{,}2\ d_n + 9{,}6\ . \end{cases}$$

1° Établir que $v_n = \dfrac{3}{4}\ v_{n-1} + 34$.

2° On pose $u_n = v_n - 136$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme -36 .

b) Exprimer u_n en fonction de n, puis v_n et d_n en fonction de n .

c) Étudier le sens de variation des suites (v_n) et (d_n) , ainsi que leurs limites.

d) Calculer les valeurs des deux indices à la fin des 5 ans.

81 On considère la fonction f définie sur$]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x$$

et la suite définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que, pour tout entier naturel n, les termes de la suite sont strictement positifs.

1° a) Étudier le sens de variation de la fonction f.
Construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.

b) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n .
En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

2° a) Construire la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

b) À l'aide de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, construire les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses .

c) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

82 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}\,,$$

où a et b sont deux réels .

1° Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2° On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n x\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

a) Prouver que cette suite est positive et calculer u_1 .

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, alors :

$$u_n = -\frac{n+1}{\mathrm{e}^n} + 1\ .$$

c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

83 **Capital et investissement**
Une entreprise dispose d'un capital initial de 360 000 euros qu'elle place à intérêts composés en début d'année 2006, au taux annuel de 3,5 % .
Elle envisage, dans le même temps, un emprunt pour réaliser un investissement en matériel.
Cet emprunt sera remboursable par des annuités v_n payables d'avance en augmentant chaque année de 5 % à partir de l'année suivante.
La première annuité v_0 de 30 000 euros est prise sur le capital disponible au début de l'année 2006.
Soit u_n le capital disponible au début de l'année $2006 + n$, après payement de l'annuité de l'année à venir.

1° Calculer u_0 et u_1 .

2° a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n .

b) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et v_{n+1} .

c) En déduire la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 2{,}085\ u_{n+1} - 1{,}08675\ u_n\ .$$

3° On admet que la suite (u_n) est de la forme :

$$u_n = a \times 1{,}035^n + b \times 1{,}05^n\,,$$

où a et b sont deux réels.

a) Sachant que $u_0 = 360\,000$ et $u_1 = 342\,600$, déterminer a et b et en déduire la forme de u_n en fonction de n .

b) À l'aide de la calculatrice, prévoir la durée maximale de l'emprunt afin qu'il reste couvert par le capital placé.

84 type BAC

On a divisé une population en deux catégories « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération sur l'autre :

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs ;
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs de cette étude et, au départ, les proportions de fumeurs et de non-fumeurs sont les mêmes.
On désigne par f_n la part de fumeurs à la génération de rang n et par $g_n = 1 - f_n$ la part de non-fumeurs à la génération de rang n. Ainsi $f_0 = g_0 = 0{,}5$.

1° a) Traduire les données par un graphe probabiliste.

b) Justifier alors l'égalité matricielle :

$$[f_n \quad g_{n+1}] = [f_n \quad g_n] \times A\,, \quad \text{où } A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

c) Calculer la part de fumeurs à la génération de rang 2 .

d) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

2° Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$f_{n+1} = 0{,}5\ f_n + 0{,}1\ .$$

3° On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0{,}2$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. *On précisera la raison et le premier terme.*

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

c) En déduire que $f_n = 0{,}3 \times 0{,}5^n + 0{,}2$.

d) Déterminer la limite de la suite (f_n) et l'interpréter.