Preuves du 29/01

Prop 28 p.13

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire

Alors $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ d'une part

d'autre part $f(0+0) = f(0)$

Ainsi $f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$.

Prop 29 p13

- Soit G un sev de $\mathbb{R}^p$

alors ① $f(G) = \{ f(x), x \in \mathbb{R}^p \} \subset \mathbb{R}^n$

② $0 \in f(G)$ d'après la prop 28 donc $f(G) \neq \emptyset$

et ③ pour $u, v \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda u + v \in f(G)$.

$\exists y, x \in \mathbb{R}^p$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$ alors

$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in f(G)$$

Car f est linéaire et G est un sev donc $\lambda x + y \in G$.

- Soit H un sev de $\mathbb{R}^n$

alors ① $f^{-1}(H) = \{ x \in \mathbb{R}^p \,/\, f(x) \in H \} \subset \mathbb{R}^p$

② $0 \in f^{-1}(H)$ car $0 \in H$ et $f(0) = 0$ d'après la prop 28

③ Soient $x, y \in f^{-1}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda x + y \in f^{-1}(H)$

on sait que $f(x) \in H$ et $f(y) \in H$ et H sev de $\mathbb{R}^n$ donc

$\lambda f(x) + f(y) \in H$ or $\lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y)$ par linéarité

donc $\lambda x + y \in f^{-1}(H)$.