

# 1 Résolution de systèmes linéaires

**1** Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  le système  $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$  admet-il dans  $\mathbb{R}^2$  aucune solution ? une unique solution ? une infinité de solutions ?

**2** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^4$  les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z + t = 11 \\ 2x + y + z + t = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14 \\ x - 2z = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases}$$

**3** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en fonction du paramètre réel  $m$ , les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} (1 + m^2)x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ mz = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 6y - 4z = 2 \\ -3x - 9y + 6z = m - 5 \end{cases}$$

**4** Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

**5** Résoudre le système suivant dans  $\mathbb{R}^3$ , en fonction des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = \lambda \\ -x + 2y + z = \mu \end{cases}$$

**6** Montrer que l'application  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{matrix}$  est surjective.

**7** Déterminer  $f(\mathbb{R}^2)$  et  $g(\mathbb{R}^3)$  où :

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{matrix}, \quad g : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{matrix}$$

## 2 Sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

**8** Dans  $\mathbb{R}^3$ , le vecteur  $(-6, -17, 17)$  est-il une combinaison linéaire des vecteurs  $((2, 1, 3), (3, 5, -2))$  ?

**9** Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ou non :

1.  $E_1 = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R}\}$
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
3.  $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4.  $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / e^x e^y = 0\}$
5.  $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z(x^2 + y^2) = 0\}$
6.  $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\}$ .

**10** Montrer que la famille  $\mathcal{B} = ((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

**11** Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

1.  $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$
2.  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$
3.  $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4.  $D = \{(a + 2b, a - b, 3b, 2a), a, b \in \mathbb{R}\}$
5.  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x\}$

**12** Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver deux familles génératrices différentes :

1.  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$
2.  $F = \{(-2y + z, y - z, y) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

**13** Vérifier que chacun des espaces vectoriels suivants est un plan de  $\mathbb{R}^3$  et en donner une équation cartésienne.

1.  $A = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 2, 0))$
2.  $B = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 3, 0))$
3.  $C = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, -1))$
4.  $D = \text{Vect}((1, -1, 1), (2, 1, 1), (0, -3, 1))$

**14** Écrire chacun des sous-espaces de  $\mathbb{R}^4$  suivants sous les trois formes d'écriture : soit par un système d'équations cartésiennes (comme  $A$ ), soit par un paramétrage (comme  $B$ ), soit par une famille génératrice (comme  $C$ ) :

1.  $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
2.  $B = \{(a - b + 3c, c, a + b, 0), a, b, c \in \mathbb{R}\}$
3.  $C = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1))$

**15** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $u_1 = (1, -1, 1)$  et  $u_2 = (1, 1, 0)$ ,  $v_1 = (1, 3, -1)$  et  $v_2 = (1, -5, 3)$ .

Montrer que  $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

**16** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $u_1 = (-1, 1, -1)$  et  $u_2 = (1, 2, 4)$ ,  $v_1 = (3, -1, a)$  et  $v_2 = (2, 3, b)$ .

Déterminer  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

**17** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $u = (1, 3, 1)$ ,  $v = (2, 1, 2)$  et  $w = (m, m + 1, 3m + 2)$ , où  $m \in \mathbb{R}$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $m$  pour que  $w \in \text{Vect}(u, v)$ .

**18** Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1.  $((1, 2), (3, 3))$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
4.  $((2, -1, 1), (1, -1, 3), (-3, 1, 1), (1, 2, 3))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
5.  $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**19** Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1.  $A = \{(x - y + z, 3x + 6z, -2x + 4y), x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
2.  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3.  $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
4.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
5.  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
6.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

**20** Déterminer si la famille donnée est une famille libre / famille génératrice / base de l'espace donné :

1.  $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$  dans  $\mathbb{R}^4$
2.  $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$  dans  $\mathbb{R}^3$
3.  $((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 0, -2))$  dans  $\mathbb{R}^4$ .
4.  $((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
5.  $((1, 2, 3), (-1, 2, 5), (-1, 10, 21))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
6.  $((1, 2), (2, 1), (-1, 4))$  dans  $\mathbb{R}^2$

**21**

1. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est libre, et la compléter une base de  $E$ .
  - (a) Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1))$
  - (b) Dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{F} = ((1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$
2. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est génératrice, et en extraire une base de  $E$ .
  - (a) Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{F} = ((2, 3), (1, -1), (1, 2))$
  - (b) Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 2), (1, 3, -4))$

**22** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (4, 5, 6)$  et  $w = (m^2, 2m, m)$ , où  $m \in \mathbb{R}$ .

1. La famille  $(u, v)$  est-elle libre ? génératrice de  $\mathbb{R}^3$  ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $m$  pour que  $(u, v, w)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**23** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne :  $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$  et  $G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3))$ .

Montrer que  $F = G$ .

**24** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ .

Vérifier la formule de Grassmann.

**25** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((2, 1, 0))$ .

Déterminer  $F \cap G$ .  $F$  et  $G$  sont-ils en somme directe ?

**26** Soit  $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$  et  $G = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 1, 0))$ .

Déterminer  $F \cap G$ .  $F$  et  $G$  sont-ils en somme directe ?

**27** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ .

Soit  $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

**28** Soit  $F = \text{Vect}((-1, 2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$  et  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = -2z + t\}$ . Déterminer une base et la dimension de  $F$ , de  $G$  et  $F \cap G$ .

**29** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et soit  $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$ .

Trouver un vecteur  $x \in \mathbb{R}^3$  tel que  $F \oplus \text{Vect}(x) = E$ .

**30** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et soit  $F = \text{Vect}((1, 2, 2))$ .

Trouver deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $F \oplus \text{Vect}(x, y) = E$ .

**31** Montrer que si  $(u, v, w)$  est une famille libre dans  $\mathbb{R}^n$ , il en est de même pour la famille  $(u + v, v + w, w + u)$ .

**32** Soit  $n \geq 1$  et soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . On note pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $y_i = \sum_{k=1}^i u_k$ .

1. Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , exprimer  $u_j$  comme combinaison linéaire des  $y_i$ .
2. Montrer que  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .
3. On suppose  $n \geq 3$ . Quelles sont les coordonnées du vecteur  $u_1 + u_2 - u_3$  dans la base  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  ?

**33** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ .

Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**34** Soient  $A, B, C$  trois sous-espaces vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbb{R}^n = A \oplus B$  et  $A \subset C$ .

Montrer que  $C = A \oplus (B \cap C)$ .