1 Résolution de systèmes linéaires

1 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \lambda x + y &= 1 \\ x + \lambda y &= 1 \end{cases}$ admet-il dans $\mathbb{R}^2$ aucune solution ? une unique solution ? une infinité de solutions ?

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + y + z &= 5 \\ 2x + 13y - 7z &= -1 \\ x - y + z &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 7z + t &= 1 \\ 2x + 2y + z + 2t &= 0 \\ x - y - 2z + t &= -1 \\ x + 7y - 4z + t &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z + t &= 11 \\ 2x + y + z + t &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y &= 14 \\ x - 2z &= 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x + 2y + 3z &= 2 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - 4y + 2z + t &= 1 \\ y + z - t &= 0 \\ -3x + 6y - 3t &= -1 \end{cases}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre réel m, les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} (1 + m^2)x - 3y &= 5 \\ 4y + 3z &= 8 \\ mz &= 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx + y + z &= m^2 \\ x + my - mz &= m \\ x - y + mz &= 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x + 6y - 4z &= 2 \\ -3x - 9y + 6z &= m - 5 \end{cases}$

4 Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

5 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$, en fonction des paramètres λ et μ :

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \\ 2x + y + 3z &= \lambda \\ -x + 2y + z &= \mu \end{cases}$$

6 Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{array}$ est surjective.

7 Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{array}$$

2 Sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\textbf{8}}$ Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-6,-17,17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2,1,3),(3,5,-2))$?

$\boxed{\textbf{9}}$ Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ou non :

1. $E_1 = \{(x+y, x-y, 2y) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-3z=0\}$
3. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$
4. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ e^x e^y = 0\}$
5. $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z(x^2+y^2)=0\}$
6. $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2=0\}$.

$\boxed{\textbf{10}}$ Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{11}}$ Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

1. $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=y=z\}$
3. $C = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x-y+2z-t=0 \text{ et } y+z-t=0\}$
4. $D = \{(a+2b, a-b, 3b, 2a)\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x+2y=y+6z \text{ et } y+3z=-2x\right\}$

$\boxed{\textbf{12}}$ Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver deux familles génératrices différentes :

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-2y+z=0\}$
2. $F = \{(-2y+z, y-z, y) \in \mathbb{R}^3,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$\boxed{\textbf{13}}$ Vérifier que chacun des espaces vectoriels suivants est un plan de $\mathbb{R}^3$ et en donner une équation cartésienne.

1. $A = \text{Vect}((1,0,0),(0,2,0))$
2. $B = \text{Vect}((1,0,1),(2,3,0))$
3. $C = \text{Vect}((1,1,2),(0,1,-1))$
4. $D = \text{Vect}((1,-1,1),(2,1,1),(0,-3,1))$

$\boxed{\textbf{14}}$ Écrire chacun des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants sous les trois formes d'écriture : soit par un système d'équations cartésiennes (comme A), soit par un paramétrage (comme B), soit par une famille génératrice (comme C) :

1. $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z-t=0 \text{et } y+z-t=0\}$
2. $B = \{(a-b+3c, c, a+b, 0),\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \text{Vect}((1,2,-1,0),(0,1,3,-1))$

15 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (1, -1, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -5, 3)$.
Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

16 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (-1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, 2, 4)$, $v_1 = (3, -1, a)$ et $v_2 = (2, 3, b)$.
Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

17 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 3, 1)$, $v = (2, 1, 2)$ et $w = (m, m + 1, 3m + 2)$, où $m \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que $w \in \text{Vect}(u, v)$.

18 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((1, 2), (3, 3))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((2, -1, 1), (1, -1, 3), (-3, 1, 1), (1, 2, 3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ dans $\mathbb{R}^4$.

19 Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{(x - y + z, 3x + 6z, -2x + 4y),\ x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

20 Déterminer si la famille donnée est une famille libre / famille génératrice / base de l'espace donné :

1. $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$ dans $\mathbb{R}^4$
2. $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 0, -2))$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. $((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $((1, 2, 3), (-1, 2, 5), (-1, 10, 21))$ dans $\mathbb{R}^3$.
6. $((1, 2), (2, 1), (-1, 4))$ dans $\mathbb{R}^2$

21

1. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est libre, et la compléter une base de E.
   (a) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1))$
   (b) Dans $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = ((1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$
2. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est génératrice, et en extraire une base de E.
   (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = ((2, 3), (1, -1), (1, 2))$
   (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 2), (1, 3, -4))$

22 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (m^2, 2m, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. La famille (u, v) est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^3$?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{23}}$ Dans $\mathbb{R}^3$, on donne : $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3))$.
Montrer que $F = G$.

$\boxed{\textbf{24}}$ Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$.
Vérifier la formule de Grassmann.

$\boxed{\textbf{25}}$ Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((2, 1, 0))$.
Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

$\boxed{\textbf{26}}$ Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 1, 0))$.
Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

$\boxed{\textbf{27}}$ Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.
Soit $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F est G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{28}}$ Soit $F = \text{Vect}((-1, 2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ y = -2z + t\}$. Déterminer une base et la dimension de F ,de G et $F \cap G$.

$\boxed{\textbf{29}}$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$.
Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $F \oplus \text{Vect}(x) = E$.

$\boxed{\textbf{30}}$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((1, 2, 2))$.
Trouver deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$ tels que $F \oplus \text{Vect}(x, y) = E$.

$\boxed{\textbf{31}}$ Montrer que si (u, v, w) est une famille libre dans $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour la famille $(u + v, v + w, w + u)$.

$\boxed{\textbf{32}}$ Soit $n \geqslant 1$ et soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} u_i$.

1. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, exprimer u_j comme combinaison linéaire des y_i.
2. Montrer que $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose $n \geqslant 3$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u_1 + u_2 - u_3$ dans la base $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$?

$\boxed{\textbf{33}}$ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

$\boxed{\textbf{34}}$ Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$ et $A \subset C$.
Montrer que $C = A \oplus (B \cap C)$.