

CHAPITRE 7

Intégration

"L'essence des mathématiques, c'est la liberté." *Cantor*

Prerequis

- Connaître les formules usuelles de dérivation
- Calculer l'aire d'un rectangle

Objectifs

- Calculer une intégrale avec une primitive
- Calculer une valeur moyenne

Exercices d'application

- Exercices 2 à 6, 9, 14, 16, 17, 20 du TD7

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment**1.1 Définition et propriétés géométriques****Définition 1****Intégrale sur un segment**

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a \leq b$).

On appelle **intégrale de f sur le segment $[a, b]$** l'aire algébrique de la surface définie entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On note alors cette quantité :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

Remarques :

- R1** – La courbe pouvant être parfois au-dessus ou parfois en-dessous de l'axe des abscisses, on compte positivement dans le calcul de l'intégrale les aires situées au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement dans le calcul de l'intégrale les aires situées en-dessous de l'axe des abscisses.

- R2** – Si $a = b$, alors la surface située sous la courbe est réduite à un trait, donc l'intégrale (l'aire) est considérée comme nulle.
- R3** – Cette définition est dite « informelle », car pas très rigoureuse (peut-on bien toujours définir l'aire ?). Mais cette définition a l'avantage de permettre l'interprétation géométrique de la notion d'intégrale et donne une bonne intuition des résultats.

Proposition 2

Propriétés de l'intégrale

Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$. Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$.

1. Linéarité de l'intégrale.

Si α, β sont deux réels, alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

2. Relation de Chasles.

Si c est un réel tel que $a \leq c \leq b$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

3. Positivité de l'intégrale.

$$\text{Si } \forall t \in [a, b], f(t) \geq 0, \quad \text{alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

$$\text{Si } \forall t \in [a, b], f(t) \leq 0, \quad \text{alors } \int_a^b f(t) dt \leq 0$$

et plus généralement,

$$\text{Si } \forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t), \quad \text{alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

4. Inégalité triangulaire.

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Définition 3

Valeur moyenne d'une fonction

Si $a < b$ et si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** la quantité définie par :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Proposition 4*Inégalités de la moyenne*

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et soient deux réels m et M .

$$\text{Si } \forall t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M, \quad \text{alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

$$\text{autrement dit } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

En particulier, la fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. Elle admet donc un minimum et un maximum sur $[a, b]$ pour lesquels on a :

$$\left(\min_{[a,b]} f \right) (b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \left(\max_{[a,b]} f \right) (b-a)$$

1.2 Intégrale et primitives**Définition 5****Primitives d'une fonction**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit qu'une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive de f sur I** si la fonction F est dérivable sur I et si :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Exemples :

E1 – La fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction \ln .

E2 – La fonction $G : x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive sur \mathbb{R}^* de la fonction $x \mapsto 1/x$.

Remarque :

On peut sans souci généraliser la définition de primitive à une fonction définie sur une réunion d'intervalles. Une primitive de f est alors une fonction F définie sur cette réunion d'intervalles telle que, sur chaque intervalle, F soit dérivable et $F' = f$.

Proposition 6*Les primitives diffèrent d'une constante*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si on suppose que f admet deux primitives F et G sur l'intervalle I , alors l'écart entre F et G est une constante :

$$\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I, F(x) = G(x) + k$$

Remarque :

En particulier, si une fonction f admet une primitive, elle en admet alors une infinité (si on ajoute une constante, cela devient une autre primitive). On parlera donc toujours sans autre précision de une primitive de f (et non la primitive de f).

Proposition 7*L'intégrale fonction de sa borne supérieure*

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$.

On note pour tout $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

qu'on peut appeler *l'intégrale fonction de sa borne supérieure*.

La fonction φ est une primitive de f , c'est précisément *la seule primitive de f qui s'annule en a* .

Remarque :

Si f est une fonction positive, il est clair que la fonction φ est croissante sur $[a, b]$ en interprétant en terme d'aires. On retrouve donc bien que si une fonction est positive sur un intervalle, alors ses primitives sont croissantes sur l'intervalle.

Théorème 8*Théorème fondamental de l'analyse*

Toute fonction continue sur un intervalle admet toujours au moins une primitive sur cet intervalle.

Conséquence 9

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$).

En notant F une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{notée}}{=} \left[F(t) \right]_a^b$$

Remarques :

R1 – En particulier, cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie.

R2 – On retrouve ainsi que, lorsque $a = b$, on a bien $\int_a^a f(t) dt = 0$.

R3 – Cette définition permet d'étendre aussi la définition d'intégrale au cas où $b < a$. On a donc :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

Intuitivement, si on fait une intégrale de a à b , avec $b < a$, on compte l'aire « à l'envers », donc on compte tout négativement.

R4 – La linéarité reste donc vraie pour toute intégrale (si $a < b$ ou $a > b$).

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Il suffit que f et g soient continues sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$)

R5 – La relation de Chasles reste vraie même si c est en dehors de l'intervalle $[a, b]$, tant que f est bien continue sur tous les segments considérés :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

R6 – Pour la positivité de l'intégrale et la croissance de l'intégrale, il est essentiel de considérer les bornes dans le bon sens. Sinon cela changerait le sens de l'inégalité.

$$\text{si } b < a \text{ (mauvais sens)} \quad \text{et si } \forall t \in [b, a], f(t) \leq g(t) \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$$

2 Calcul d'intégrales

2.1 Calcul de primitives

Remarques :

R1 – Pour déterminer une primitive d'une fonction, il suffit de lire à l'envers le tableau de dérivation.

R2 – Attention : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* . Elle donc admet bien une primitive sur \mathbb{R}^* , cela ne peut pas être la fonction \ln (qui n'est définie que sur $]0, +\infty[$), c'est en fait la fonction $t \mapsto \ln(|t|)$, qui elle est bien définie sur \mathbb{R}^* .

R3 – La fonction \ln admet elle aussi une primitive sur $]0, +\infty[$.

Formules usuelles :

$f(x)$	$F(x)$ ($+c \in \mathbb{R}$)	Domaine de validité
1	x	\mathbb{R}
x	$\frac{1}{2}x^2$	\mathbb{R}
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbb{R} si $n \geq 0$ $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < 0, n \neq -1$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln x+a $	$] -a, +\infty[$ ou $] -\infty, -a[$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}
e^{ax} , ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a}e^{ax}$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	\mathbb{R}

Cas des fonctions composées :

$f(x)$	$F(x) \text{ (} +c \in \mathbb{R} \text{)}$	$f(x)$	$F(x) \text{ (} +c \in \mathbb{R} \text{)}$
$u'(x)g'(u(x))$	$g(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x)u(x)$	$\frac{1}{2}(u(x))^2$	$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)}$	$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$	$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$
$u'(x)(u(x))^n \text{ (} n \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \text{)}$	$\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$	$u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$
$u'(x)(u(x))^\alpha \text{ (} \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \text{)}$	$\frac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$	$\frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$	$\text{Arctan}(u(x))$

Exemples :

- E1** – Déterminer une primitive de $g : x \mapsto xe^{x^2}$
- E2** – Déterminer la primitive de $f : x \mapsto x^3$ qui s'annule en 2.

2.2 Intégration par parties (pour un produit)

Théorème 10

Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Exemples :

E1 – Calculons $\int_0^2 te^{-t}dt$.

On pose : $\forall t \in [0, 2]$, $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 2]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_0^2 te^{-t}dt = \left[t(-e^{-t}) \right]_0^2 - \int_0^2 1(-e^{-t})dt = -2e^{-2} + \int_0^2 e^{-t}dt = -2e^{-2} + \left[-e^{-t} \right]_0^2 = 1 - 3e^{-2}$$

E2 – Calculons $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

On pose : $\forall t \in [1, 2]$, $\left| \begin{array}{l} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, 2]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{\ln(2)}{2} - \left[\frac{1}{t} \right]_1^2 = -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}$$

2.3 Changement de variable

Théorème 11

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans I . Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Remarques :

R1 – Un changement de variable peut se faire "dans les deux sens", il sera indiqué dans l'énoncé.

R2 – Si on part d'une intégrale $\int_a^b g(x)dx$ et qu'on demande un changement de variable $u = \varphi(x)$ alors $du = \varphi'(x)dx$ et la variable x est celle qui apparaît déjà dans l'intégrale, donc on essaie d'écrire " $g(x)dx$ " sous la forme " $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ ". Dans ce cas :

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

R3 – Si on part d'une intégrale $\int_a^b g(x)dx$ et qu'on nous demande un changement de variable $x = \varphi(t)$, alors $dx = \varphi'(t)dt$ et c'est la variable actuelle x qu'on veut modifier. Il s'agit donc de remplacer les bornes de l'intégrale par " $\varphi(\alpha)$ " et " $\varphi(\beta)$ " puis on a :

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Exemples :

E1 – Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ à l'aide d'un changement de variable $u = \frac{x}{x+1}$.

On pose $\forall x \in [1, 2], \varphi(x) = \frac{x}{x+1}$.

La fonction φ est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, 2]$ et on a : $\forall x \in [1, 2], \varphi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \\ &= \int_1^2 \ln(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \ln(u)du = \int_{1/2}^{2/3} \ln(u)du \\ &= \left[u \ln(u) - u \right]_{1/2}^{2/3} \\ &= \frac{7}{6} \ln(2) - \frac{2}{3} \ln(3) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

E2 – Calculer l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{3x} dx$ à l'aide d'un changement de variable $x = e^t$.

On remarque que $1 = e^0$ et $e = e^1$.

Notons donc pour tout $t \in [0, 1], \varphi(t) = e^t$.

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = e^t$. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{\ln(x)}{3x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(\varphi(t))}{3\varphi(t)} \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{3e^t} e^t dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{3} dt = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

E3 – Les changements de variables "simples" sont les changements affines, i.e. $t = au + b$.

Dans ce cas, on a " $dt = adu$ " et il suffit de changer les bornes selon les valeurs que prennent t et u .

$$\int_2^5 \exp(3t + 1)dt = \int_{3 \times 2 + 1}^{3 \times 5 + 1} \exp(u) \times 3du \quad (\text{avec le c.v. } u = 3t + 1)$$

E4 – Un cas particulier est le changement $u = -t$. Il suffit pour cela de changer le signe des bornes, de remplacer les t par $-u$ (ou les $-t$ par u) et de changer également le du en $-dt$:

$$\int_{-1}^5 \exp(t^2 + t + 1)dt = \int_1^{-5} \exp(u^2 - u + 1)(-du) = \int_{-5}^1 \exp(u^2 - u + 1)du$$

Remarque :

On n'est pas obligé de "justifier" les changements de variables affines (du type $u = -t$ ou du type $u = at + b$). Pour tous les autres, on doit écrire les hypothèses (fonction φ , de classe \mathcal{C}^1 sur un segment, ...).

Proposition 12

Soit $a \geq 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

- Si f est une fonction paire, alors : $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt = 2 \int_{-a}^0 f(t)dt$.
- Si f est une fonction impaire, alors : $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ et $\int_0^a f(t)dt = - \int_{-a}^0 f(t)dt$.

Exemples :

E1 – $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)dt =$

E2 – $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt =$

Proposition 13

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} qui est T -périodique. Alors :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$