Logique

THEME N° 1 : Les premiers pas en logique

Objectif – Ce thème envisage quatre notions de logique élémentaire qui sont utiles dans bien des situations, en mathématiques comme ailleurs. Il s'agit de la notion de proposition, de la plus simple à quelques exemples plus élaborés, et de la négation d'une telle proposition. Plutôt que d'assener l'ensemble des exercices proposés en un seul bloc, il est plutôt conseillé de puiser dans les exemples proposés par petites touches, en fonction des besoins .

A – Proposition simple et sa négation

Quelques exemples

La négation de la phrase : « J'habite à Dijon » est : « Je n'habite pas à Dijon ».
Celle de la phrase « Le triangle ABC est équilatéral » est : « Le triangle ABC n'est pas équilatéral »

Notations usuelles

La négation d'une proposition P est notée $\overline{P}$ ou (non P).
Cette proposition est fausse si P est vraie et elle est vraie si P est fausse.

Exercice 1

Former la négation des propositions suivantes :

- « J'aime le chocolat. »
- « Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. »
- « De ma fenêtre, je vois le Mont Blanc. »

Double négation

En logique classique, la double négation correspond à une affirmation. On peut traduire cela en disant que les propositions P et $((non(nonP))$ sont équivalentes : ces deux propositions sont vraies simultanément ou fausses simultanément.

Exemples

Si P est la proposition « Je n'ai pas sommeil », (non P) peut s'énoncer « J'ai sommeil ».
Soit x un nombre réel. « x n'est pas irrationnel » équivaut à « x est rationnel ».

Remarque

La logique est sans nuance, contrairement au langage courant qui s'accommode de certaines convenances et sous-entendus. C'est ainsi que dans la vie courante « ennemi » n'est pas forcément le contraire « d'ami » puisque un ennemi de mon ennemi peut très bien être lui aussi mon ennemi. De même, dans la bouche de Chimène, « Je ne te hais point » n'est pas le contraire de

« Je te hais » : certaines forme de rhétorique comme la litote se situent résolument en dehors de la logique.

B – Le « ET » et le « OU »

1. Conjonction et disjonction inclusive de deux propositions

À partir de deux propositions P, Q, on peut former une autre proposition notée (P et Q) ou « conjonction de P et Q ». Cette nouvelle proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément, et dans ce cas seulement. Par exemple, si n est un entier relatif, « n est un multiple de 3 et de 5 » (proposition R) est la conjonction des propositions : (P) « n est un multiple de 3 » et Q : « n est un multiple de 5 ».

À partir de deux propositions P, Q, on peut aussi former une autre proposition notée (P ou Q), qui est vraie lorsque P est vraie ou lorsque Q est vraie, en convenant que le « ou » a un sens inclusif, c'est-à-dire que (P ou Q) est vraie aussi lorsque P et Q sont simultanément vraies. On dit que (P ou Q) est la disjonction inclusive des propositions P et Q. Ainsi, avec l'exemple précédent, la proposition « n est multiple de 3 ou de 5 » s'applique aux entiers 3, 6, 9, …, 5, 10, …, mais aussi à 15 qui est un multiple des deux nombres.

2. Négation des propositions (P et Q), (P ou Q)

Résultats admis
Soit P et Q deux propositions.
La négation de la proposition (P et Q) est la proposition ((non P) ou (non Q)).
La négation de la proposition (P ou Q) est la proposition ((non P) et (non Q)).

Exemples

- Si n est un entier relatif, la négation de « n est multiple de 3 et de 5 » est « n n'est pas multiple de 3 ou n n'est pas multiple de 5 » ; la négation de « n est multiple de 3 ou de 5 » est : « n n'est pas multiple de 3 ni de 5 ».
- Si ABC est un triangle, la négation de « ABC est rectangle et isocèle » est « ABC n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle », ce qui englobe bien sûr le cas où ABC n'est ni rectangle ni isocèle.
- On tire une carte d'un jeu de 32 cartes et on considère la proposition P : « la carte est un carreau ou un as ». La proposition (non P) est : « la carte n'est ni un carreau ni un as ».

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, on donne une proposition P. Enoncer la proposition contraire (non P).

a) « Je pratique l'Anglais et l'Espagnol. » (P)
b) « Au cinéma, le tarif réduit est consenti aux chômeurs ou aux étudiants. » (P)
c) Soit x un nombre réel. « x est positif ou rationnel. » (P)
d) On tire une des 32 cartes d'un jeu. « La carte tirée est un roi et n'est pas un carreau. » (P)
e) On considère un nombre entier naturel dont l'écriture décimale comporte trois chiffres. « Le nombre est multiple de 3 et il est supérieur ou égal à 300. » (P)

Exercice 4 – QCM

Soit n un entier naturel strictement inférieur à 100, et (P) la proposition : « n est pair et multiple de 5 ou n est multiple de 3 ». La proposition (non P) est (choisir la bonne réponse) :

a) « n est impair et non multiple de 5 et non multiple de 3 » ;
b) « n est impair ou non multiple de 5 et n est multiple de 3 » ;
c) « n n'est multiple ni de 10 ni de 3 » ;
d) « n est pair ou multiple de 5 et n est multiple de 3 ».

C – Les locutions « POUR TOUT … » et « IL EXISTE… »

1. Proposition universelle, proposition existentielle

Une proposition logique peut porter sur tous les éléments d'un certain ensemble ; on dit alors que cette proposition est *universelle*. Elle peut aussi porter sur l'existence d'au moins un élément d'un ensemble ; dans ce cas, on dit qu'elle est *existentielle*.

Par exemple, si n est un entier naturel, les propositions (P) : « tout élève de Terminale doit s'inscrire au baccalauréat » et (Q) : « tout entier naturel peut s'écrire comme la somme d'au plus quatre carrés d'entiers naturels » sont des propositions universelles ; les propositions (R) : « il existe un élève de la classe qui parle l'Espagnol » et (S) : « il existe des réels qui ne sont pas rationnels » sont des propositions existentielles.

Ces propositions sont bien souvent identifiables par des locutions appropriées telles que « *tout* ... », « *pour tout* ... », « *quel que soit* ... » pour les premières, « *il existe*... » pour les secondes ; en mathématiques, on s'efforce de toujours préciser ces locutions, que l'on nomme des *quantificateurs*. Cependant ces locutions sont bien souvent omises dans le langage courant, et c'est l'usage seul qui nous permet de les discerner. Ainsi, dans la phrase « *un entier est un décimal* », il est sous entendu que *tout* entier est un décimal ; dans la phrase « *un décimal est le quotient d'un entier par une puissance de dix* », il faut comprendre l'affirmation en terme universel pour ce qui est du décimal, mais en terme d'existence en ce qui concerne l'entier et la puissance de dix. Pour éviter les ambiguïtés, on évite ce type de formulation en mathématiques ; la dernière proposition doit plutôt s'énoncer ainsi :

« *Pour tout décimal d, il existe un entier A et un entier naturel n tels que* $d = \dfrac{A}{10^n}$. »

2. Négation d'une proposition universelle, notion de contre exemple

Exemple

Soit (P) la proposition universelle « tous les élèves de S ont la moyenne en mathématiques le jour du Bac ». La négation de (P) est « il existe au moins un élève de S qui n'a pas la moyenne en mathématiques le jour du Bac »

Cas général :

Etant donné une proposition universelle qui s'énonce :

« Pour tout élément x de l'ensemble (E), $P(x)$ est vérifié. » (P)

(Dans la pratique $P(x)$ est une propriété bien précisée vérifiée par x.)

Alors la négation de (P) s'énonce ainsi :

« Il existe au moins un élément x de (E) tel que $P(x)$ n'est pas vérifié. » (non P)

Cela signifie que, si l'on veut prouver qu'une proposition universelle (P) n'est pas vraie, il suffit de trouver un seul élément x de l'ensemble (E) tel que $P(x)$ n'est pas vraie. Cet élément x qui infirme la proposition (P) est appelé un *contre exemple*.

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^3 + 2x^2$, et (P) la proposition « f est une fonction paire ». On sait que pour une fonction définie sur **R** cette propriété (P) se traduit par : « Pour tout x élément de **R**, $f(-x) = f(x)$ ».

Pour prouver que f n'est pas une fonction paire, il suffit donc de trouver un réel particulier a tel que $f(-a) \neq f(a)$. Sans aller chercher bien loin, on constate que $f(1) = 3$ et $f(-1) = 1$; comme $f(-1) \neq -f(1)$, cela suffit à infirmer la proposition (P) : on peut conclure à l'aide de ce seul contre exemple que la fonction f n'est pas une fonction impaire.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, former la négation de la proposition (P).

a) « Tous les élèves de la classe ont la moyenne en mathématiques. » (P)

b) « Tout nombre entier pair supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. » (P)

c) « Tout nombre rationnel est décimal. » (P)

Exercice 6 – Vrai/Faux

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier la réponse, si elle est fausse, exhiber un contre exemple.

a) « Tout nombre entier naturel peut s'écrire comme somme d'au plus trois carrés d'entiers naturels. »

b) « La fonction f définie sur **R** par : $f(x) = x^2 + 1$ est une fonction paire. »

c) « La fonction f définie sur **R** par : $f(x) = x^3 + 1$ est une fonction impaire. »

d) « Tout entier naturel est soit pair soit impair. »

e) « Toute fonction définie sur **R** est soit paire soit impaire. »

f) « Toute solution sur **R** de l'équation $x^2 = 7$ est positive. »

Remarque

Considérons la proposition (P) : « Tous les chiens à deux têtes sont jaunes ». La négation de cette proposition (« Il existe un chien à deux têtes qui n'est pas jaune ») est évidemment fausse, puisqu'il n'existe pas de chien ayant deux têtes (ou alors … !). La proposition (non P) étant fausse, il en résulte que (P) est vraie ! Cela peut surprendre, mais on établit de même que toute proposition universelle portant sur les éléments de l'ensemble vide est une proposition vraie. La logique est imparable, même si elle défie parfois l'intuition.

3. Négation d'une proposition existentielle

Exemple

Soit (P) la proposition : « Il existe un entier naturel n tel que l'écriture décimale de n^2 se termine par 7 ». La négation de (P) est « Pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de n^2 ne se termine pas par 7 ».

Cas général :

Etant donné une proposition existentielle qui s'énonce :

« Il existe un élément x de l'ensemble (E) tel que $P(x)$ est vérifié. » (P)

(Dans la pratique $P(x)$ est une propriété bien précisée vérifiée par x.)

Alors la négation de (P) s'énonce ainsi :

« Pour tout élément x de (E), $P(x)$ n'est pas vérifié. » (non P)

Exercice 7 – Vrai/Faux

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

a) « Il existe un entier naturel qui admet exactement sept diviseurs. »

b) « Il existe un entier naturel dont le carré, écrit en base dix, se termine par 7. »

c) « Il existe une fonction définie sur **R** qui change une infinité de fois de sens de variation. »

d) « Il existe une solution rationnelle de l'équation $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 5) = 0$. »

e) « Il existe un réel x tel que $\dfrac{1}{x^2+1} > 1$. »

f) « Il existe un réel x tel que $x > x^{10}$. »