Révisions : Sommes doubles

Énoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On propose de calculer la somme double $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

1. Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.
2. Pour cette question, on fixe $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que $\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ (indication : on pourra raisonner par récurrence).
3. Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$ de deux manières différentes.

Corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On propose de calculer la somme double $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

1. *Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.*

   ► D'après la définition des coefficients binomiaux, on a $\binom{j}{i} = 0$ dès que $j < i$. Donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} 0 = \boxed{\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}}.$$

2. *Pour cette question, on fixe $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Montrer que $\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ (indication : on pourra raisonner par récurrence).*

   ► On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0,1,2,\dots,n\}$, $\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$. Si $n = 0$ alors $i \in \{0\}$ c'est-à-dire $i = 0$, $\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{0} \binom{j}{0} = \binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n+1}{i+1} = \binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} = 1$. Donc l'égalité est vraie pour $n = 0$. On suppose maintenant l'égalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et on veut la démontrer au rang $n+1$. Soit $i \in \{0,1,2,\dots,n,n+1\}$. On distingue deux cas : $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ ou $i = n+1$. Dans le deuxième cas, $\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \sum_{j=n+1}^{n+1} \binom{j}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\binom{(n+1)+1}{i+1} = \binom{n+2}{(n+1)+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang $n+1$. Dans le premier cas, on utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} + \binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{i+1} + \binom{n+1}{i} = \binom{n+2}{i+1} = \binom{(n+1)+1}{i+1}$$

   d'après la formule de Pascal. Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$ lorsqu'elle est vraie au rang n, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{On conclut d'après le principe de récurrence}}$.

3. *Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$ de deux manières différentes.*

   ► En utilisant les deux questions précédentes, on obtient en sommant sur les lignes :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i}.$$

   Or $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$ d'après la formule du binôme de Newton. Donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} = 2^{n+1} - 1 - (n+1) = \boxed{2^{n+1} - n - 2}.$$

   De même, on obtient en utilisant la question 1 et sommant sur les colonnes :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} - \binom{j}{0} \right) = \sum_{j=1}^{n} (2^j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{j=0}^{n} 2^j - 2^0 - n \\
&= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 - n = 2^{n+1} - 1 - 1 - n = \boxed{2^{n+1} - n - 2}.
\end{aligned}$$