Révisions : Intégration par changement de variables

1) On change la fonction
2) On change les bornes
3) On change l'élément d'intégration

I) La nouvelle variable t dépend de l'ancienne x

https://www.youtube.com/watch?v=bhyxfSsalAg

Exemple 1: $\int_1^2 (e^x+1)^2 dx$

On pose t = $e^x = \varphi(x)$. La fonction φ est C^1 sur I = ………… et pour tout réel $x \in$ I on a : $\varphi'(x) = e^x$.

1) $(e^x+1)^2 = (t+1)^2$
2) $si\ x = 1$ alors t = e et si $x = 2$ alors t = e^2
3) dt = $\varphi'(x)dx = e^x dx$ donc $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$$\int_1^2 (e^x+1)^2 dx = \int$$

Exemple 2: $\int_1^2 (e^x+1)^2 dx$

On pose t = $e^x + 1 = \varphi(x)$. La fonction φ est C^1 sur I = ………… et pour tout réel $x \in$ I on a : $\varphi'(x) = e^x$.

1) $(e^x+1)^2 = t^2$
2) $si\ x = 1$ alors t = $e+1$ et si $x = 2$ alors t = e^2+1
3) dt = $\varphi'(x)dx = e^x dx$ donc $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-1}$

$$\int_1^2 (e^x+1)^2 dx = \int$$

Remarque : cette intégrale est beaucoup plus simple à calculer sans changement de variable

Exemple 3: $\int_1^2 (\ln(x)+1)^2 dx$

On pose t = $\ln(x) + 1 = \varphi(x)$. La fonction φ est C^1 sur I = ………… et pour tout réel $x \in$ I on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$

1) $(\ln(x)+1)^2 = t^2$
2) $si\ x = 1$ alors t = 1 et si $x = 2$ alors t = $\ln(2)+1$
3) dt = $\varphi'(x)dx = \frac{1}{x}dx$ donc $dx = x\,dt = e^{t-1}dt$

$$\int_1^2 (\ln(x)+1)^2 dx = \int$$

II) L'ancienne variable x dépend de la nouvelle t

<u>Exemple 1 :</u> $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

On pose $x = cos(t) = \varphi(t)$

1) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos(t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{sin(t)^2}} = \frac{1}{|\sin(t)|}$
2) $si\ x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) alors\ t = \frac{\pi}{3}$; $si\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) alors\ t = \frac{\pi}{4}$
3) $dx = -\sin(t)\,dt$

φ est C^1 sur l'intervalle $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}]$; $\frac{1}{|\sin(t)|} = \frac{1}{\sin(t)}$ et on a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(t)}(-\sin(t))\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} -1dt = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$