

Révisions : Intégration par changement de variables

- 1) On change la fonction
- 2) On change les bornes
- 3) On change l'élément d'intégration

I) La nouvelle variable t dépend de l'ancienne x
<https://www.youtube.com/watch?v=bhyxfSsalAg>

Exemple 1: $\int_1^2 (e^x + 1)^2 dx$

On pose $t = e^x = \varphi(x)$. La fonction φ est C^1 sur $I = \dots\dots\dots$ et pour tout réel $x \in I$ on a : $\varphi'(x) = e^x$.

- 1) $(e^x + 1)^2 = (t + 1)^2$
- 2) si $x = 1$ alors $t = e$ et si $x = 2$ alors $t = e^2$
- 3) $dt = \varphi'(x)dx = e^x dx$ donc $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$$\int_1^2 (e^x + 1)^2 dx = \int$$

Exemple 2: $\int_1^2 (e^x + 1)^2 dx$

On pose $t = e^x + 1 = \varphi(x)$. La fonction φ est C^1 sur $I = \dots\dots\dots$ et pour tout réel $x \in I$ on a : $\varphi'(x) = e^x$.

- 1) $(e^x + 1)^2 = t^2$
- 2) si $x = 1$ alors $t = e + 1$ et si $x = 2$ alors $t = e^2 + 1$
- 3) $dt = \varphi'(x)dx = e^x dx$ donc $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-1}$

$$\int_1^2 (e^x + 1)^2 dx = \int$$

Remarque : cette intégrale est beaucoup plus simple à calculer sans changement de variable

Exemple 3: $\int_1^2 (\ln(x) + 1)^2 dx$

On pose $t = \ln(x) + 1 = \varphi(x)$. La fonction φ est C^1 sur $I = \dots\dots\dots$ et pour tout réel $x \in I$ on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$

- 1) $(\ln(x) + 1)^2 = t^2$
- 2) si $x = 1$ alors $t = 1$ et si $x = 2$ alors $t = \ln(2) + 1$
- 3) $dt = \varphi'(x)dx = \frac{1}{x}dx$ donc $dx = \frac{dt}{\frac{1}{x}} = \frac{dt}{e^{t-1}}$

$$\int_1^2 (\ln(x) + 1)^2 dx = \int$$

II) L'ancienne variable x dépend de la nouvelle t

Exemple 1 : $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

On pose $x = \cos(t) = \varphi(t)$

- 1) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos(t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(t)^2}} = \frac{1}{|\sin(t)|}$
- 2) si $x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ alors $t = \frac{\pi}{3}$; si $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ alors $t = \frac{\pi}{4}$
- 3) $dx = -\sin(t) dt$

φ est C^1 sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$; $\frac{1}{|\sin(t)|} = \frac{1}{\sin(t)}$ et on a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(t)} (-\sin(t)) dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} -1 dt = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$