Questions- Réponses du 15 au 19 juin

Q°1 J'ai une question qui porte sur le chapitre 13 (les DL) je ne comprends pas le passage de la première ligne à la deuxième dans l'exemple qui se situe à la page 6 du cours.

R°1 Dans cet exemple on utilise le DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+u}$ = 1-u+u²-u³+o(u³) avec u = $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$. C'est une composition (licite avec les DL).

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3\right)+o(x^3)\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}}_{\text{donne l'eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3)\end{aligned}$$

Q°2 Je ne comprends pas pourquoi on utilise cette forme exponentielle pour remplacer i... :

$$z^2 = ia \Leftrightarrow z^2 = (e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a})^2$$

R°2 |i| = 1 et arg(i)= $\frac{\pi}{2}$ donc i = $e^{i\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{4}})^2$

On utilise aussi dans cette égalité que pour un nombre $a \geq 0;\ a = (\sqrt{a})^2$, cela permet d'avoir un carré de chaque côté de l'égalité et de finir la résolution de l'équation facilement ($z^2 = w^2 \Leftrightarrow z^2 - w^2 = 0 \Leftrightarrow (z-w)(z+w) = 0 \Leftrightarrow z = w \text{ ou } z = -w$)

Q°3

J'aurais une question concernant la question 1 de l'exercice 6 du TD 14. Je ne comprends pas cela :

Il suffit de choisir trois nombres distincts successivement, il y a $8\times7\times6$ possibilités, puis de diviser le résultat par $3! = 6$ (car si on choisit trois nombres distincts, il y a $3\times2\times1$ listes possibles ordonnées avec ces trois nombres, mais une seule ne fournit une liste croissante). On a donc :

tout particulièrement la division du résultat par 6.

R°3 Dans cet exercice il s'agit de dénombrer les triplets qui forment une suite strictement croissante (sans répétition possible donc). On choisit dans un premier temps, une liste de trois nombres distincts {a ;b ;c}. Il y a $8\times7\times6$ choix possibles puis on regarde combien de triplets on peut faire avec ces 3 nombres. Il y en a 6 mais un seul qui répond au critère « les nombres obtenus forment une suite strictement croissante ». On a donc compté 6 fois plus de résultats que ceux qu'on attendait d'où la division par 6.

Par exemple les 6 tirages (1,2,3) ; (1,3,2) ; (2,1,3) ; (2,3,1) ;(3,1,2) et (3,2,1) donne la même liste {1 ;2 ;3}. En revanche il y a bien un seul triplet correctement ordonné (le premier).

Une autre façon de dénombrer les triplets qui forment une suite strictement serait de considérer les tirages simultanés et donc les combinaisons, on retrouve le même résultat : $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6}{6} = 8\times7 = 56$

Q°4

J'ai une question concernant l'exercice 9 du chapitre 16. Je ne comprend pas les résultats dans le tableau avec S/D à la question 2.

R°4

2. En terme d'événements, puis en terme de probabilités, on a :

$S \setminus D$	$\boxed{-1}$	0	1
0	$\emptyset$	$(X=0, Y=0)$	$\emptyset$
$\boxed{1}$	$(X=0, Y=1)$	$\emptyset$	$(X=1, Y=0)$
2	$\emptyset$	$(X=1, Y=1)$	$\emptyset$

$S \setminus D$	-1	0	1
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2	0	p^2	0

Par exemple, au croisement de la première colonne et de la deuxième ligne on veut que la somme S valle 1 et pour que la différence D valle -1,
il faut que « X = 0 et Y = 1 ».
Cet événement a pour probabilité P(X=0)*P(Y=1) =(1-p)p par indépendance des variables X et Y.

Q°5

J'ai une question concernant l'exercice (2) du chapitre 16. Je ne comprends pas ce passage :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} [X=j] \cap [Y=k-j]\right)$$

R°5 X et Y sont plus grandes que 1 (ce sont des variables aléatoires qui suivent une loi géométrique). Pour que X+Y=k, on peut avoir X = 1 et Y = k-1 ; ou X=2 et Y=k-2 ; ….ou X=k-1 et Y=1. Ces événements sont 2 à 2 incompatibles et ils recouvrent l'ensemble des possibilités donc on peut appliquer la formule des probabilités totales en considérant le système complet d'événements $(X=j)_{1\leq j\leq k-1}$.

Q°6 je n'arrive pas à comprendre le dernier exemple du chapitre 8

R°6 On cherche $v = (x_1; x_2; x_3)$ un vecteur de F et β un réel tels que
u = v+ $\beta(1;1;1) \in F + G$.

On a donc $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \beta = u_1 \\ x_2 + \beta = u_2 \\ x_3 + \beta = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + u_1 + -\beta + u_2 + -\beta + u_3 = 0 \\ x_1 = -\beta + u_1 \\ x_2 = -\beta + u_2 \\ x_3 = -\beta + u_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \beta = \frac{u_1+u_2+u_3}{3} \\ x_1 = -\frac{u_1+u_2+u_3}{3} + u_1 = \frac{2u_1-u_2-u_3}{3} \\ x_2 = -\frac{u_1+u_2+u_3}{3} + u_2 = \frac{-u_1+2u_2-u_3}{3} \\ x_3 = -\frac{u_1+u_2+u_3}{3} + u_3 = \frac{-u_1-u_2+2u_3}{3} \end{cases}$$

(on résout le système par substitution)

Q°7

En revanche, j'ai une autre question concernant le chapitre 1 sur les sommes. Je ne comprends pas bien cette étape :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{j=1}^{n}(2j)^2 - \sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2$$

R°7

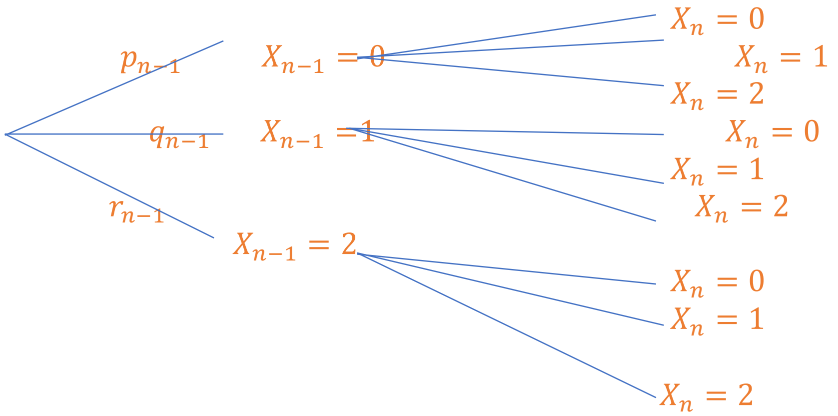
Dans ce calcul, on fait une distinction des cas suivant la parité de k:

- (-1)^k= 1 si k est pair donc si k=2j (pour j entre 1 et n pour que k soit entre 2 et 2n)
- (-1)^k=-1 (d'où la soustraction) si k est impair donc si k = 2j-1 (pour j entre 1 et n pour que k soit entre 1 et 2n-1)

Q°8 J'ai tenté de résoudre l'exercice 14 du TD15 : cependant, sa résolution me semble assez opaque, et ce dès la première question. En effet, quel type d'arbre permet de donner cette matrice? Et comment trouve-t-on les limites finales?

R°8 Si vous avez fait une spécialité math l'année dernière (en S ou en ES), vous résolviez ce genre de question avec un graphe probabiliste. On peut s'en passer et se contenter de l'arbre suivant :

Situation après le (n-1)- ième tirage : Situation avant le tirage suivant :



On a les probabilités conditionnelles suivantes :

$P_{X_{n-1}=0}(X_n = 1) = 1$ car dans l'urne B il y avait 2 boules noires et dans l'urne A il y avait 2 boules blanches donc après échange il y aura forcément une boule noire dans l'urne A.

$P_{X_{n-1}=1}(X_n = 1) = 0{,}5$ car dans l'urne B il y avait 1 boule noire et une boule blanche et dans l'urne A aussi et il faut tirer les 2 boules blanches ou les 2 boules noires pour que la composition de l'urne A ne change pas.

$P_{X_{n-1}=2}(X_n = 1) = 1$ car dans l'urne B il y avait 2 boules blanches et dans l'urne A il y avait 2 boules noires donc après échange il y aura forcément une boule noire dans l'urne A.

Avec la formule des probabilités totales on a :

$q_n = \mathrm{P}(X_n = 1)$

$= \mathrm{P}(X_{n-1} = 0)P_{X_{n-1}=0}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_{n-1} = 1)\, P_{X_{n-1}=1}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_{n-1} = 2)P_{X_{n-1}=2}(X_n = 1)$

$= p_{n-1} + 0{,}5q_{n-1} + r_{n-1}$

Formule qu'on retrouve dans le produit matriciel proposé.

On raisonne de même pour retrouver p_n et r_n.