Corrigé du devoir maison n°15

1. Les événements P_{n-2}, P_{n-1} et F_n sont indépendants, donc :
$$P(B_n) = P(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) = P(P_{n-2})P(P_{n-1})P(F_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2. L'événement $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est inclus dans F_n et l'événement $B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}$ est inclus dans P_n. Comme P_n et F_n sont incompatibles, il en est de même pour B_n et B_{n+1}. Comme le raisonnement ne dépend pas de n, il en est de même pour B_{n+1} et B_{n+2}. Analogue pour B_n (inclus dans F_n) et B_{n+2} (inclus dans P_n).
Par incompatibilité $P(B_n \cap B_{n+1}) = 0 \neq P(B_n)P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$. Donc les événements ne sont pas indépendants deux à deux, et encore moins mutuellement indépendants.

3. D'après l'incompatibilité démontrée avant, on a :
$$u_3 = P(B_3) = \frac{1}{8} \quad u_4 = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$
$$u_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

4. D'après la définition des U_i, on a $U_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$, donc par les lois de Morgan :
$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$
soit $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1})$ puisque B_{n-1}, B_n et B_{n+1} sont incompatibles.

L'événement U_{n-2} ne dépend que des résultats des $n-2$ premiers lancers et l'événement B_{n+1} ne dépend que des résultats des lancers $n-1$, n et $n+1$, donc U_{n-2} et B_{n+1} sont indépendants, d'où :
$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2})P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_{n-2}$$

5. Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on a $U_n \subset U_{n+1}$, donc par croissance de P, on a $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante.
La suite est croissante et majorée par 1 (u_n est une probabilité), donc elle converge.

6. Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on a :
$$u_{n+1} = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2}.$$

7. On sait que (u_n) converge vers une limite finie ℓ ; par passage à la limite dans la relation précédente, on a $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$, soit $\ell = 1$.

8. On a $\overline{N} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n$. Or les événements (U_n) forment une suite croissante, donc, par continuité croissante de P, on a :
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(U_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell = 1.$$
Donc $P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 0$.