1 Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$, donner la loi de X, calculer son espérance et sa variance.

1. X_1 = le nombre de Pile obtenus en lançant 2 pièces équilibrées.
2. X_2 = le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche lorsque l'on tire sans remise des boules dans une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches
3. X_3 = le produit de 3 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

1. $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   En notant P_k : « obtenir Pile au k-ième lancer », on a par indépendance des lancers :
   $$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{4}$$
   $$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{4}$$
   et comme $([X_1 = 0], [X_1 = 1], [X_1 = 2])$ forme un système complet d'événements, on a :
   $$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$$
   La loi de X_1 est donc donnée par :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X_1 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

   .
   $\mathbb{E}[X_1] = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(X_1 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$
   Par théorème de transfert, $\mathbb{E}[X_1^2] = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} k^2\mathbb{P}(X_1 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$
   On en déduit que $\mathbb{V}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
2. $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
   En notant B_k (respectivement N_k) : « obtenir une boule blanche (resp. noire) au k-ième lancer », on a :
   $$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
   $$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
   et comme $([X_2 = 1], [X_2 = 2], [X_2 = 3])$ forme un système complet d'événements, on a :
   $$\mathbb{P}(X_2 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{6}$$
   La loi de X_2 est donc donnée par :

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   .
   $\mathbb{E}[X_2] = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}(X_2 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$
   Par théorème de transfert, $\mathbb{E}[X_2^2] = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2\mathbb{P}(X_2 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}.$
   On en déduit que $\mathbb{V}[X_2] = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_2])^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

3. $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 4, 8\}$.
On peut supposer que l'expérience (choisir trois nombres entiers entre 0 et 2) est modélisée par

$$\Omega = \left\{(i, j, k),\ \text{avec } i, j, k \in \{0, 1, 2\}\right\} = \{0, 1, 2\}^3 \qquad \Longrightarrow \qquad Card(\Omega) = 3^3 = 27$$

et on est en situation d'équiprobabilité sur cet univers. Chaque issue apparaît avec probabilité $1/27$.

- On a : $[X_3 = 8] = \{(2, 2, 2)\}$, donc :
$$\mathbb{P}(X_3 = 8) = \frac{1}{27}$$
- On a : $[X_3 = 4] = \{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}$, donc :
$$\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$
- On a $[X_3 = 2] = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$, donc :
$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$
- On a $[X_3 = 1] = \{(1, 1, 1)\}$, donc :
$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{27}$$
- Enfin, puisque $([X_3 = 0], [X_3 = 1], [X_3 = 2], [X_3 = 4], [X_3 = 8])$ forme un SCE, on a :
$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = 1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{19}{27}$$

La loi de X_3 est donc donnée par :

k	0	1	2	4	8
$\mathbb{P}(X_3 = k)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

.

$\mathbb{E}[X_3] = \displaystyle\sum_{k \in X_3(\Omega)} k\mathbb{P}(X_3 = k) = 1 \times \frac{1}{27} + 2 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{1}{27} = 1.$

Par théorème de transfert, $\mathbb{E}[X_3^2] = \displaystyle\sum_{k \in X_3(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X_3 = k) = 1 \times \frac{1}{27} + 4 \times \frac{1}{9} + 16 \times \frac{1}{9} + 64 \times \frac{1}{27} = \frac{125}{27}.$

On en déduit que $\mathbb{V}[X_3] = \mathbb{E}[X_3^2] - (\mathbb{E}[X_3])^2 = \dfrac{125}{27} - 1 = \dfrac{98}{27}$

2 Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame 1 point. Du paquet, on tire simultanément et au hasard 2 cartes. On désigne par X la variable égale au total des points marqués.
Déterminer la loi de X, son espérance et son écart-type.

Tirer simultanément deux cartes revient finalement à les tirer l'une après l'autre sans remise.
Notons D_k (resp R_k, A_k) « obtenir une dame (resp un roi, resp un as) au k-ième tirage ».
Ici on a :

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 6, 7, 10\}$$

- $[X = 2] = D_1 \cap D_2$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

  ou avec la formule $\frac{\text{Nombre de tirages avec 2 dames}}{\text{Nombre de tirages possibles}} = \frac{1}{45}$
- $[X = 4] = R_1 \cap R_2$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

- $[X = 10] = A_1 \cap A_2$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$

- $[X = 3] = (D_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap D_2)$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{12}{90}$$

- $[X = 6] = (D_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap D_2)$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{20}{90}$$

- $[X = 7] = (R_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap R_2)$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 7) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{30}{90}$$

Finalement, la loi de X est donnée par :

k	2	3	4	6	7	10
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{20}{90}$

.

On en déduit que :

$$\mathbb{E}[X] = 2\frac{2}{90} + 3\frac{12}{90} + 4\frac{6}{90} + 6\frac{20}{90} + 7\frac{30}{90} + 10\frac{20}{90} = \frac{594}{90} = \frac{33}{5}$$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[X^2] = 4\frac{2}{90} + 9\frac{12}{90} + 16\frac{6}{90} + 36\frac{20}{90} + 49\frac{30}{90} + 100\frac{20}{90} = \frac{594}{90} = \frac{4402}{90}$$

donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{4402}{90} - \left(\frac{33}{5}\right)^2 = \frac{1204}{225}$$

3 On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne plus que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.
Notons R_k (resp. N_k, B_k) l'événement « on obtient une boule rouge (resp. noire, resp. blanche) au k-ième tirage ».

- $[X = 1]$ se réalise si et seulement si on tire une boule rouge dès le premier tirage. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{6}.$$

- $[X = 2]$ se réalise si et seulement si en deux tirages on vide l'urne, donc soit avec une boule rouge au deuxième tirage, soit avec les deux boules noires.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(J_1 \cap R_2)\\ &= \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(R_2) + \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(R_2)\\ &= \left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{6} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{30}\end{aligned}$$

- $[X = 4]$ se réalise si et seulement si sur les trois premiers tirages on a tiré 1 boule noire et 2 boules jaunes. En effet, dans ce cas (et seulement dans ce cas) après le 3ème tirage, il reste 3 boules de couleurs différentes, et alors le jeu s'arrêtera après le 4ème tirage. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(J_1 \cap N_2 \cap J_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap J_2 \cap J_3)\\ &= \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(J_2)\mathbb{P}_{J_1\cap J_2}(N_3) \;+\; \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(N_2)\mathbb{P}_{J_1\cap N_2}(J_3) \;+\; \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(J_2)\mathbb{P}_{N_1\cap J_2}(J_3)\\ &= \left(\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

- Enfin, puisque $([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4])$ forme un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(X = 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 4) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{7}{30} - \frac{3}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Finalement, la loi de X est donnée par :

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

.

On en déduit que :

$$\mathbb{E}[X] = 1\frac{1}{6} + 2\frac{7}{30} + 3\frac{3}{10} + 4\frac{3}{10} = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[X^2] = 1\frac{1}{6} + 4\frac{7}{30} + 9\frac{3}{10} + 16\frac{3}{10} = \frac{258}{30} = \frac{43}{5}$$

donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{43}{5} - \left(\frac{41}{15}\right)^2$$

4 On effectue des lancers d'une pièce équilibrée. On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (on admet que presque-sûrement on obtient au moins un Pile). Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Ici, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- En notant P_j (resp. F_j) « obtenir Pile (resp. Face) au j-ième lancer », on a :
  - ⋆ $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{2}$.
  - ⋆ Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\cdots\mathbb{P}(F_{k-1})\mathbb{P}(P_k) \quad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}}$$

- X admet une espérance si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, c'est bien le cas car on reconnaît directement une série géométrique dérivée convergente. On a donc :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

- X^2 admet une espérance par théorème de transfert si $\sum k^2\mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, on a :

$$\begin{aligned}\forall N \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{N} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{N}(k(k-1) + k)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

  On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées première et seconde convergentes, donc X^2 admet bien une espérance, et on a :

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 6$$

  Ainsi, X admet bien une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 6 - 2^2 = 2$$

5 Soit n un entier strictement supérieur à 3. On considère n personnes qui jouent à « Pile » ou « Face » avec une pièce équilibrée et de façon indépendante.

1. Soit A l'événement : « une seule personne exactement obtient un résultat différent des $(n-1)$ autres personnes ». Calculer la probabilité de A.
2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée « partie ») jusqu'à la réalisation de A. On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.
   Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

1. Ici $\Omega = \{P, F\}^n$ (une issue est une liste de n résultats de Pile ou Face). On a donc $Card(\Omega) = 2^n$.
   Le nombre d'issues favorables à A est $2 \times n$. En effet, les listes favorables à A sont :
   $$(P, F, F, \dots, F, F),\ (F, P, F, \dots, F, F),\ (F, F, P, \dots, F, F),\ (F, F, F, \dots, F, P)$$
   et
   $$(F, P, P, \dots, P, P),\ (P, F, P, \dots, P, P),\ (P, P, F, \dots, P, P),\ (P, P, P, \dots, P, F)$$
   On a donc par équiprobabilité sur Ω :
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$
2. $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$.
   Notons A_k l'événement « on réalise l'événement A lors de la k-ième partie ». Si la k-ième partie a lieu, alors l'événement A_k se réalise avec la même probabilité que A.
   - $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   - $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \left(1 - \dfrac{n}{2^{n-1}}\right)\left(\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)$.
   - Pour tout $k \geqslant 2$, on a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k)\end{aligned}$$
   $$\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right).$$
   En notant $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$, on a alors :
   $$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p}$$
   - Comme $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on en déduit que :
   $$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) = 1 - p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} = 1 - p\frac{1}{1-(1-p)} = 1 - 1 = 0$$
   Presque-sûrement le jeu s'arrête. Ici, l'événement $[X = 0]$ est négligeable.
   - Espérance de X ?
   On regarde si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, c'est le cas car on reconnaît une série géométrique dérivée, on a :
   $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p = p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\right) = p \times \frac{1}{\Big(1-(1-p)\Big)^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$$

- Variance de X ?
  On regarde déjà si X admet un moment d'ordre 2, autrement dit (théorème de transfert) si $\sum k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge (absolument). Ici, en remarquant que $k^2 = k(k-1)+k$, on a :

$$k^2\mathbb{P}(X=k) = k(k-1)(1-p)^{k-1}p + k(1-p)^{k-1}p$$

  on a donc la somme de deux termes généraux de séries convergentes (géométriques dérivées), donc X^2 admet bien une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(k(k-1)(1-p)^{k-1}p + k(1-p)^{k-1}p\Big) &= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}\end{aligned}$$

  Finalement, X admet bien une variance et :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

6 On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces. On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.
Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

On va admettre que, presque-sûrement, on obtient au moins une fois le même résultat avec le deuxième dé qu'avec le premier dé, ce qui permet de bien définir la variable aléatoire.
Dans ce cas, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- **Loi de X ?**
  Notons pour tout $j \geqslant 1$, S_j : « on obtient un succès au j-ième lancer du 2ème dé », (un succès étant d'obtenir le résultat du premier dé).
  Alors pour tout $k \geqslant 1$, on a :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k)\\ &= \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{S_1}\cap\cdots\cap\overline{S_{k-2}}}(\overline{S_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{S_1}\cap\cdots\cap\overline{S_{k-1}}}(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.\end{aligned}$$
  On a donc :
  $$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}}$$
  Remarquons que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$*, ainsi* $([X=k])_{k\geqslant 1}$ *forme bien un système quasi-complet d'événements. Presque-sûrement, on obtiendra au moins une fois avec le deuxième dé, le même résultat que le premier dé.*

- **Espérance de X ?**
  On regarde si $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge (absolument). Ici, c'est le cas car on reconnaît une série géométrique dérivée, on a :
  $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \boxed{6}$$

- **Variance de X ?**
  On regarde déjà si X admet un moment d'ordre 2, autrement dit (théorème de transfert) si $\sum k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge (absolument). Ici, en remarquant que $k^2 = k(k-1)+k$, on a :
  $$k^2\mathbb{P}(X=k) = k(k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6} + k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$
  on a donc la somme de deux termes généraux de séries convergentes (géométriques dérivées), donc X^2 admet bien une espérance et :
  $$\mathbb{E}[X^2] = \frac{5}{36}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{36}\frac{2}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 60+6 = 6\times 11$$
  Finalement, X admet bien une variance et :
  $$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 6\times 11 - 6^2 = 6\times 5 = \boxed{30}$$

$\boxed{7}$ On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 2$.

Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Déterminer $N(\Omega)$.
2. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(N > k)$. En déduire la loi de N.

1. Au plus tôt, $N = 2$ (il faut au moins deux tirages pour obtenir une boule déjà obtenue.
   Dans le pire des cas, $N = n+1$, si on tire toutes les boules une fois (en n tirages), la $(n+1)$-ième boule tirée aura forcément été déjà tirée auparavant.
   De plus, tous les cas intermédiaires sont possibles.

$$\boxed{N(\Omega) = [\![2, n+1]\!]}$$

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculons $\mathbb{P}(N > k)$.
   L'événement $[N > k]$ signifie qu'il faut strictement plus de k tirages pour obtenir une boule déjà obtenue auparavant.
   Ainsi, $[N > k]$ se réalise si et seulement si, sur les k premiers tirages, on a obtenu k boules différentes.
   Sur les k premiers tirages, on a n^k listes de résultats possibles (n possibilités à chaque tirage, il y a remise).
   De plus, il y a $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ listes de résultats ayant k numéros distincts. Ainsi :

$$\mathbb{P}(N > k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \boxed{\frac{n!}{n^k(n-k)!}}$$

Remarquons que par exemple, $\mathbb{P}(N > 1) = \dfrac{n!}{n^1(n-1)!} = 1$, ce qui est cohérent.

Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(N > k-1) - \mathbb{P}(N > k) \\
&= \frac{n!}{n^{k-1}(n-k+1)!} - \frac{n!}{n^k(n-k)!} \\
&= \boxed{\frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}}
\end{aligned}$$

et le résultat est vrai pour $k = n+1$ également, puisque $[N = n+1]$ se réalise si et seulement si on a n nombres différents sur les n premiers tirages, on a donc :

$$\mathbb{P}(N = n+1) = \frac{n!}{n^n}$$

ce qui est valable avec la formule précédente.

Finalement,

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}(N = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}(X=0)=1-p.$

Déterminer la loi de $Y=X^2$, son espérance et sa variance.

Puisque $\dfrac{p}{2}+\dfrac{p}{2}+(1-p)=1$, on a $([X=-1],[X=1],[X=0])$ qui forme un système (quasi)-complet d'événements. On peut donc supposer que :

$$\boxed{X(\Omega)=\{-1,0,1\}}$$

- Puisque $Y=X^2$, on a $Y(\Omega)=\{0,1\}$.
- $\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X^2=0)=\mathbb{P}(X=0)=1-p$.
- $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y^2=1)=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=-1)=p$.

Puisque Y est finie, Y admet bien espérance et variance. Avec la loi obtenue précédemment, on a :

$$\mathbb{E}[Y]=1\times p+0\times(1-p)=\boxed{p}$$

Par théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}[Y^2]=1^2\times p+0^2\times(1-p)=p$$

donc

$$\mathbb{V}[Y]=\mathbb{E}[Y^2]-(\mathbb{E}[Y])^2=p-p^2=\boxed{p(1-p)}$$

9 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Montrer que : $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)$.

Déjà, remarquons que puisque X est finie, X admet bien une espérance.

1ère méthode.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\Big(\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X\geqslant k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\mathbb{P}(X\geqslant k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X\geqslant k)+\sum_{k=2}^{n+1}\mathbb{P}(X\geqslant k)\\
&= 1\mathbb{P}(X\geqslant 1)-(n+1)\mathbb{P}(X\geqslant n+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\mathbb{P}(X\geqslant k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k) \qquad \text{(en insérant le } \mathbb{P}(X\geqslant 1)\text{, et en remarquant que } \mathbb{P}(X\geqslant n+1)=0)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)}$$

2ème méthode.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}(X=j)\right)\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\mathbb{P}(X=j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}\mathbb{P}(X=j)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X=j)\\
&= \mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)=\mathbb{E}[X]}$$

$\boxed{10}$ Soit X une variable telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)$.
2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X>n)$ converge. En déduire que, en cas d'existence,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$$

1. Soit $n \geqslant 1$.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\Big(\mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X>k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) + \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X>k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)
\end{aligned}$$

2. Montrons à présent que :
$$\mathbb{E}[X] \text{ existe } \iff \sum \mathbb{P}(X>n) \text{ converge}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\sum \mathbb{P}(X>n)$ converge. D'après l'égalité de la question 1, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \quad \leqslant \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) \quad \leqslant \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$$

Ainsi, la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante (somme partielle d'une série de termes positifs) et majorée, donc admet une limite finie. Ainsi, $\mathbb{E}[X]$ existe.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que X admette une espérance, i.e. que $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ admet une limite finie lorsque $n \to +\infty$. D'après l'égalité de la question 1, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) + n\mathbb{P}(X>n)} \qquad (*)$$

Or, on a :

$$n\mathbb{P}(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k)$$

et comme $\forall k \geqslant n+1$, on a $0 \leqslant n\mathbb{P}(X=k) \leqslant k\mathbb{P}(X=k)$, et que toutes les séries sont convergentes, on a alors :

$$0 \leqslant n\mathbb{P}(X>n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\right)$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X>n) = 0}$$

Finalement, d'après l'égalité $(*)$, les deux termes du membre de droite admettent bien une limite finie lorsque $n \to +\infty$, donc le membre de gauche de $(*)$ admet une limite finie aussi.
Ainsi, la série de terme général $\mathbb{P}(X>k)$ converge.

Finalement, on a bien l'équivalence voulue, et si on est bien dans le cas où $\mathbb{E}[X]$ existe, alors par passage à la limite dans l'égalité $(*)$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k) = \mathbb{E}[X] + 0}$$

$\boxed{\textbf{11}}$ Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire des boules de la façon suivante : si la boule est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule noire ; si la boule est noire, le jeu s'arrête et on note X le nombre de tirages qui ont été effectués.
Dans le cas où on obtiendrait jamais la boule noire, on note $X = 0$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que la variable $X + 1$ admet une espérance et donner sa valeur. En déduire l'espérance de X.

1. X peut prendre la valeur 0 (si on n'a jamais de boule noire), et X peut prendre chaque entier $k \geqslant 1$ (si on tire $k-1$ fois une boule blanche, puis une boule noire). Ainsi $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$.
   On notera dans la suite N_j (respectivement B_j) « la boule tirée au j-ième tirage est noire (resp. blanche). ».
   - $[X = 1] = N_1$, donc $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$.
   - Pour tout $k \geqslant 2$, on a : $[X = k] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \quad \text{(par probas composées)}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{k}\times\frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}\end{aligned}$$

   - Pour $[X = 0]$, on a $[X = 0] = \bigcap_{j=1}^{+\infty} B_j$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) =& \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} B_j\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{N} B_j\right) \quad \text{(par corollaire du théorème limite monotone)}\\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+1)!} \quad \text{(par probas composées, similaire à précédemment)}\\ &= 0\end{aligned}$$

   Ainsi, on peut supposer que l'événement $[X = 0]$ est négligeable.
   Finalement, en remarquant que la formule inclut bien également le cas $k = 1$ (et même le cas $k = 0$), on peut donc affirmer que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$$

2. $X + 1$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geqslant 0}(k+1)\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument (par théorème de transfert). Or, ici :

$$(k+1)\mathbb{P}(X = k) = (k+1)\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

   et on reconnaît le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Ainsi, $X + 1$ admet bien une espérance, et

$$\mathbb{E}[X+1] = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} = e$$

   Donc par linéarité de l'espérance, X admet bien une espérance également, et :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(X+1) - 1] = \mathbb{E}[X+1] - 1 = e - 1$$

12 On lance simultanément deux dés équilibrés A et B. Le dé A porte le nombre « 1 » sur 4 faces et « -2 » sur les deux autres. Le dé B porte les nombres -2, -1, 0, 1, 2, 3.

1. On note X le résultat de A, Y le résultat de B, et $S = |X+Y|$. Déterminer la loi de X et de Y.
2. Déterminer la loi de S puis la loi du couple (X, S). X et S sont-elles indépendantes ?

1. On a $X(\Omega) = \{-2, 1\}$ et par équiprobabilité des faces, on a $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X=-2) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$
   $Y(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et
   $$\forall k \in [\![-2, 3]\!],\ \mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{6}.$$
2. Remarquons que $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et que les lancers sont indépendants.

   On a donc:

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(S=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   et la loi du couple (X,S) est:

$X \setminus S$	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
-2	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

   Les variables X et S sont indépendantes (on vérifie que $P(X=k)P(S=j) = P(X=k \cap S=j)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ et tout $j \in S(\Omega)$).

13 On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.

On note X (respectivement Y) le nombre de Pile obtenu au 1er (resp. 2ème) tirage.

1. Déterminer les lois de $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Déterminer la loi de (S, D) et calculer $cov(S, D)$.
3. S et D sont-elles indépendantes ?

1. Comme dans l'exercice 1 question 1, on a $S(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

   La loi de S est donc donnée par :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

   .

   On a $D(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. La loi de D est donc donnée par :

k	-1	0	1
$\mathbb{P}(D = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

   .

2. | $S \setminus D$ | -1 | 0 | 1 |
   |---|---|---|---|
   | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
   | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
   | 2 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 |

   $cov(S, D) = E(SD) - E(S)E(D) = 0$.
   Les variables S et D sont non corrélées linéairement.

3. La position des 0 dans le tableau précédent indique que S et D ne sont pas indépendantes.

14 On considère deux urnes A et B et 4 boules : deux blanches et deux noires.

On choisit au hasard deux boules que l'on place dans l'urne A, les deux autres étant alors placées dans l'urne B. On effectue ensuite une suite de tirages de la façon suivante : à chaque tirage, on extrait au hasard une boule de chaque urne, puis on les remet après les avoir échangées.
On note X_0 le nombre de boules noires initialement dans l'urne A et pour tout $n \geqslant 1$, X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A à l'issue de n tirages (donc juste avant le tirage suivant).
On note, pour tout entier $n \geqslant 0$: $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.

1. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geqslant 1$: $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$.
2. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et préciser P^{-1}. Calculer $P^{-1}MP$. En déduire X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

1. En faisant un arbre on trouve: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$
2. $PQ = 12I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{12}Q$.

   Notons $D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$

   On sait que pour tout entier $n \geq 1, X_n = MX_{n-1} = ... = M^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$

   avec $PD^nP^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2+4(-0,5)^n & 2-2(-0,5)^n & 2+4(-0,5)^n \\ 8-8(-0,5)^n & 8+4(-0,5)^n & 8-8(-0,5)^n \\ 2+4(-0,5)^n & 2-2(-0,5)^n & 2+4(-0,5)^n \end{pmatrix}$.

   Si $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $X_n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2+4(-0,5)^n \\ 8-8(-0,5)^n \\ 2+4(-0,5)^n \end{pmatrix}$

   Si $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $X_n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2-2(-0,5)^n \\ 8+4(-0,5)^n \\ 2-2(-0,5)^n \end{pmatrix}$

   Si $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $X_n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2+4(-0,5)^n \\ 8-8(-0,5)^n \\ 2+4(-0,5)^n \end{pmatrix}$
3. Quelquesoit la situation initiale, les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes de limite respective $\frac{1}{6}$;$\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{6}$