Questions réponses du 15 mai au 22 mai

Q°1 Dans le chapitre 14, je ne comprends pas du tout les justifications de la remarque 2 page 2. Pourriez-vous s'il vous plaît appliquer la méthode 1 à un exemple concret ? Que signifie "faire une partition de P(Ω)" ?
Concernant la méthode 2, j'ai essayé de l'appliquer à un exemple où Ω est un ensemble de couleurs et A l'évènement "couleur froide". Si j'ai bien compris, le rôle de l'application est de dire (oui ; non ; non ...) selon si l'élément i d'oméga est une couleur froide ou non (avec 1=oui et 0=non). Mais je ne comprends pas à quoi correspond Card(P(Ω)), ni donc par quelle opération on arrive à 2^n.

R°1 Méthode 1 : J'ai donné un exemple pendant la classe virtuelle du mercredi 13 mai, c'est une bonne idée de le transcrire. Si on se donne $\Omega = \{1; 2; 3\}$, P(Ω) est l'ensemble des parties qu'on peut faire avec des éléments de **Ω.** Il y a une partie avec 0 (l'ensemble vide) ; 3 parties avec 1 élément ({1} ; {2} ; {3}) ; 3 parties avec 2 éléments ({1 ; 2} ; {1 ; 3} ; {2 ; 3}) et une partie avec 3 éléments (Ω). On arrive bien à 8 = $2^3 = 2^{Card(\Omega)}$ éléments dans P(Ω).
Une partition de P(Ω) est la donnée d'ensembles deux à deux disjoints dont la réunion forme P(Ω). C'est comme un système complet d'événements.
Méthode 2 : Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qui le constitue (le cardinal d'une famille avec 2 parents et 2 enfants est 4).
Vous avez parfaitement bien compris la construction de la bijection entre P(Ω) et $\{0; 1\}^n$. Si je reprends le même exemple que pour la Méthode 1 ; en considérant l'ensemble E = {1 ; 3}, son image sera le triplet (1 ;0 ;1).
Puisqu'il s'agit d'une bijection, chaque élément de $\{0; 1\}^n$ a un seul antécédent dans P(Ω). On sait dénombrer $\{0; 1\}^n$: son cardinal est 2^n. Alors il y a bien 2^n éléments dans P(Ω) ce que l'on note Card(P(Ω))= 2^n.

Q°2 Aussi, dans la définition 8, je ne comprends pas à ce que signifie la notation (Ω ; $\mathcal{A}$). Certes, c'est un espace, mais à quel lien cela correspond-il entre Ω et $\mathcal{A}$?

R°2 La notion de tribu (ensemble $\mathcal{A}$) est un peu compliquée. Lorsqu'on se donne une expérience aléatoire et un univers Ω associé à cette expérience aléatoire alors on cherche un ensemble d'événements (un ensemble de parties de l'univers) sur lequel on va pouvoir faire des calculs de probabilités. Pour cela il faut que les opérations qu'on a définies sur les événements (contraire, union, intersection) existent. La plus petite tribu est l'ensemble $\mathcal{A} = \{\emptyset; \Omega\}$ mais elle n'a aucun intérêt. Il faut au moins qu'on se donne un événement A, alors on peut considérer la tribu $\mathcal{A} = \{\emptyset; \Omega ; A ; \bar{A}\}$. On peut aussi ne pas se restreindre et choisir $\mathcal{A}$ = P(Ω). En pratique on ne cherchera pas à expliciter la tribu $\mathcal{A}$.
Pour répondre à votre dernière question on a toujours $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$.

Q°3 Est-ce qu'on peut écrire $A \backslash (B \cup C) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$?

R°3 Oui, cette égalité est parfaitement juste.

Q°4 Après avoir relu le cours du 20 mai, je me rends compte que je ne comprends pas le théorème 22 et en fait le théorème 11. Je crois que cette notion de système complet (quasi-complet) qui me pose problème, je ne comprends pas pourquoi:
P(A ∩ $\bar{B}$)= P(A) - P(A ∩ B) ?

R°4

Dans les théorèmes 11 et 22, le système (quasi-)complet d'événements est bien constitué de tous les événements B_i pour tout i dans I. Dans le cas très simple où l'ensemble I ne contient que 2 éléments alors on a nécessairement $B_2 = \overline{B_1}$
C'est ce qu'on considère dans la preuve de la proposition 27: puisque (B; $\bar{B}$) est un système complet d'événements, on a pour tout événement A , P(A)= P(A ∩ B)+P(A ∩ $\bar{B}$) autrement dit P(A ∩ $\bar{B}$)= P(A) - P(A ∩ B).
Finalement, un système complet d'événements est une liste d'événements 2 à 2 incompatibles dont la réunion est l'univers tout entier (on n'oublie aucun cas et on ne compte personne en double).
Par exemple si une expérience aléatoire a pour univers l'ensemble des élèves de la classe, en considérant les élèves nés en janvier, ceux nés en février, en mars...., en novembre et en décembre on aura un système complet d'événements (sce) constitué de 12 ensembles (card(I)=12).

Remarque : plusieurs erreurs se sont glissées dans la première version du corrigé du TD 14.

- Dans l'exercice 18 question 3 il faut lire $\frac{6}{9609} = \frac{2}{3203}$
- Dans l'exercice 10 il faut lire $\mathrm{P}(A_3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$

$$\mathrm{P}(A_4) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$\text{Et } \mathrm{P}(A_5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{15} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$