Khôlle n°20 (A)

Question de cours :

Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ aussi.

Exercice 1 :

1. Donner le $DL_6(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$. En déduire le $DL_7(0)$ de Arctan(x).
2. Donner le développement asymptotique de $\frac{x^2}{x-1}$ au voisinage de $+\infty$ (on donnera 4 termes). Interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 2 :

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie : $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

1. Justifier que f admet un minimum et un maximum sur $[0,1]$.
   On les note : $a = \min_{t\in[0,1]} f(t)$ et $b = \max_{t\in[0,1]} f(t)$.
2. Montrer que $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
3. En déduire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.
4. Calculer $\int_0^1 (f(t)-a)(b-f(t))dt$ et en déduire l'inégalité : $\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -ab$.
5. On pose pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x) = \int_0^x f^2(t)dt + af(x)$.
   Déduire des questions précédentes l'existence d'un $d \in [0,1]$ tel que $\varphi(d) = 0$.

Exercice 3 :

Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant à chaque fois et en notant sa couleur.
On note A_n l'évènement: "on obtient des boules des deux couleurs au cours de n tirages",
et B_n: "on obtient au plus une boule noire".

1. *Calculer $p(A_n)$ et $p(B_n)$.*
2. *A_2 et B_2 sont-ils indépendants?*
3. *A_3 et B_3 sont-ils indépendants?*

Corrigé Khôlle n°20 (A)

Exercice 1 :

1. Par composition on a : $\frac{1}{1+x^2}$ = 1-$x^2 + (x^2)^2 - (x^2)^3 + o(x^6)$= $1-x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$
   En primitivant, puisque Arctan(0)= 0, on obtient : Arctan(x)= $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$
2. $\frac{x^2}{x-1} = \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$. La droite d'équation y = x+1 est asymptote oblique à la courbe de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ au voisinage de +∞. Et on sait que la courbe est au-dessus de cette droite ($\frac{1}{x} > 0$)

Exercice 2 :

1. f est continue sur le segment [0 ;1] donc elle est bornée et elle atteint ses bornes.
   Notons a= $min_{[0;1]}f(t) = f(x_1)$ et b= $max_{[0;1]}f(t) = f(x_2)$.
2. Si a>0 alors $f > 0$ sur [0 ;1] donc par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre, on aurait : $\int_0^1 f(x)dx > 0$ ce qui est faux.
   Si b<0 alors $f < 0$ sur [0 ;1] donc par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre, on aurait $\int_0^1 f(x)dx < 0$ ce qui est faux.
   On a démontré en raisonnant par l'absurde que $a \leq 0$ et $b \geq 0$.
3. TVI appliqué à f continue sur [0 ;1] qui vérifie $f(x_1) \leq 0$ et $f(x_2) \geq 0$.
4. Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre on a : $0 \leq \int_0^1 (f(t) - a)(b - f(t)dt$
   Par linéarité de l'intégrale on a :
   $\int_0^1 (f(t) - a)(b - f(t)dt = \int_0^1 -f(t)^2dt + (a + b)\int_0^1 f(t)dt - ab = \int_0^1 -f(t)^2dt - ab$
   car $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Ainsi $\int_0^1 f(t)^2dt \leq -ab$
5. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction φ continue sur [0 ;1] en tant que somme de fonctions continues sur [0 ;1] et qui vérifie $\varphi(c) \geq 0$ (d'après la question 3.)
   et $\varphi\ (x_2) \leq 0$ (parce que $\int_0^{x_2} f(t)^2dt \leq \int_0^1 f(t)^2dt \leq -ab$ d'après la question 4.)

Exercice 3 :

1. $\overline{A_n}$ = "on obtient que des boules rouges ou que des boules noires" ainsi
   $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$
   B_n = "on obtient que des boules rouges ou exactement une boule noire" ainsi
   $$P(B_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{1+n}{2^n}$$
2. $A_2 \cap B_2$ = "*on obtient une boule noire et une boule rouge*" ainsi
   $$P(A_2 \cap B_2) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
   Alors que $P(A_2) \times P(B_2) = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \times \frac{1+n}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2}$
   Les événements A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.
3. Regardons si $\overline{A_3}$ et B_3 sont indépendants : $P(\overline{A_3} \cap B_3)$ = P(« on obtient que des boules rouges »)
   $= \frac{1}{8}$

Et $P(\overline{A_3}) \times P(B_3) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{8} = P(\overline{A_3} \cap B_3)$. Les événements $\overline{A_3}$ et B_3 sont indépendants donc les événements A_3 et B_3 sont indépendants .

Khôlle n°20 (B)

Question de cours :

Formule de Bayes

Exercice 1 :

1. a) Donner le $DL_1(0)$ de $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$
   b) En déduire la régularité de cette fonction au voisinage de 0 (continuité, dérivabilité, tangente éventuelle)

2. Donner le développement asymptotique de $(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$ (on donnera 3 termes). Interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 2 :

On considère la fonction

$$f : x \to \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}.$$

Donner l'ensemble de définition de f.
Montrer que f est dérivable et préciser f'.
Etudier les variations de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^3+t}}$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.
Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On lance n fois un dé équilibré. Les lancers sont supposés indépendants.
On s'intéresse aux nombres de lancers dont le résultat est pair, ainsi qu'au nombre de lancers dont le résultat est "1".
Pour $k \in [|0,n|]$, on note A_k l'évènement {on obtient k nombres pairs}, B_k l'évènement {on obtient k "1"} et C_k l'évènement {on obtient un nombre de pairs ou de "1" égal à k}. Par exemple la suite de 5 lancers: 1,5,3,2,1 réalise les évènements A_1, B_2 et C_3.

1. Pour $k \in [|0,n|]$, déterminer $p(A_k)$ et $p(B_k)$.
2. Déterminer $p(A_0 \cap B_0)$ puis $p(C_0)$. Les évènements A_0 et B_0 sont-ils indépendants?
3. Déterminer $p(A_1 \cap B_0)$, $p(A_0 \cap B_1)$, puis $p(C_1)$.
4. Pour k un entier entre 0 et n, on note $D_k = A_k \cup B_k$. Calculer $P(D_0)$ $puis$ $P(D_1)$.

Corrigé Khôlle n°20 (B)

Exercice 1 :

1. a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))$

$$=-\frac{x}{6}+o(x)$$

b) La fonction admet un $DL_1(0)$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ et le prolongement est dérivable avec $f'(0)=\frac{-1}{6}$. La tangente à la courbe de f au voisinage de 0 a pour équation y = $-\frac{x}{6}$.

2. Au voisinage de +∞, on a : $(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x+1)(\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{x^2}}{2}+\frac{\frac{1}{x^3}}{3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3}))$

$$=1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$$

$$=1+\frac{3}{2x}+\frac{5}{6x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$$

La droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe de cette fonction au voisinage de +∞ et la courbe est au-dessus de cette droite ($\frac{3}{2x}>0$).

Exercice 2 :

f est définie sur tout intervalle où g : $t\rightarrow\frac{1}{\sqrt{t^3+t}}=\frac{1}{\sqrt{t(t^2+1)}}$ est continue donc sur]0 ;+∞[.

En notant G une primitive de G on a $f(x)=G(2x)-G(x)$, donc f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2g(2x)-g(x)=\frac{2}{\sqrt{8x^3+2x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$.

La fonction g est dérivable sur]0 ;+∞[. et pour tout t ϵ]0 ;+∞[, on a : g'(t)= $\frac{\frac{-(3t^2+1)}{2\sqrt{t^3+t}}}{t^3+t}=\frac{-(3t^2+1)}{2(t^3+t)\sqrt{t^3+t}}<0$

La fonction g est donc strictement décroissante sur]0 ;+∞[.

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a $2x>x$ ainsi pour tout t$\in[x;2x]$, *on a*: $g(2x)\leq g(t)\leq g(x)$.

Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre, il vient : $xg(2x)\leq f(x)\leq xg(x)$

<u>Au voisinage de 0 :</u>

$g(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $xg(x)\sim\sqrt{x}$ et $xg(2x)\sim\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x\to0}f(x)=0$

<u>Au voisinage de +∞ :</u>

$g(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ donc $xg(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $xg(2x)\sim\frac{1}{\sqrt{8x}}$ et

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

Exercice 3 :

1. Soit k un entier compris entre 0 et n.
   Il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k nombres pairs. La probabilité d'avoir k nombres pairs est $(\frac{1}{2})^k$ et la probabilité d'avoir n-k nombres impairs est $(\frac{1}{2})^{n-k}$ donc
   $P(A_k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$
   De même $P(B_k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{6})^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{5^{n-k}}{6^n}$
2. $P(A_0 \cap B_0) = \left(\frac{2}{6}\right)^n$ (les seuls nombres obtenus sont 3 ou 5) et $A_0 \cap B_0 = C_0$
   Les événements A_0 et B_0 ne sont pas indépendants, on a clairement $\left(\frac{2}{6}\right)^n \neq (\frac{1}{2})^n \times \frac{5^n}{6^n}$
3. Il y a n façons de placer le nombre pair et une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'avoir un nombre pair. Les autres nombres obtenus sont 3 ou 5 donc $P(A_1 \cap B_0) = n\frac{1}{2}(\frac{2}{6})^{n-1}$
   Il y a n façons de placer le nombre « 1 » et une probabilité de $\frac{1}{6}$ de l'obtenir. Les autres nombres obtenus sont 3 ou 5 donc $P(A_0 \cap B_1) = n\frac{1}{6}(\frac{2}{6})^{n-1}$
   $(A_1 \cap B_0) \cup (A_0 \cap B_1) = C_1$ et cette réunion est disjointe donc
   $P(C_1) = P(A_1 \cap B_0) + P(A_0 \cap B_1) = n\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = n(\frac{1}{3})^{n-1}\frac{2}{3} = \frac{2n}{3^n}$
4. On sait que $P(D_0) = P(A_0) + P(B_0) - P(A_0 \cap B_0) = (\frac{1}{2})^n + (\frac{5}{6})^n - (\frac{1}{3})^n$
   De même $P(D_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1) = \frac{n}{2^n} + \frac{n5^{n-1}}{6^n} - \frac{n(n-1)}{24}\frac{1}{3^{n-2}}$
   <u>Remarque :</u> Pour déterminer $P(A_1 \cap B_1)$, on ''place'' le nombre pair et le « 1 » avec le coefficient binomial $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et la probabilité d'avoir un nombre pair est $\frac{1}{2}$ et la probabilité d'avoir le nombre « 1 » est $\frac{1}{6}$. Les autres nombres obtenus sont 3 ou 5 et il en reste n-2 d'où une probabilité de $(\frac{3}{6})^{n-2} = \frac{1}{3^{n-2}}$

Khôlle n°20 (C)

Question de cours :

Formule des probabilités totales

Exercice 1 :

1. a) Donner le $DL_2(0)$ de $\ln(\frac{e^x - e^{-x}}{x})$
   b) En déduire la régularité de cette fonction au voisinage de 0 (continuité, dérivabilité, tangente éventuelle et position de la courbe par rapport à cette tangente)

2. Donner le développement asymptotique de $xsin(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$ (on donnera 2 termes). Interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.
   On note a_n cette solution.
2. (a) Calculer a_1.
   (b) Vérifier que : $\forall n \geqslant 2,\ a_n \in]0,1[$.
3. (a) Montrer que pour $n \geqslant 2,\ f_{n+1}(a_n) > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.
   (c) Vérifier que pour $n \geqslant 2$, $a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 3 :

On tire simultanément au hasard trois boules dans une urne qui contient 4 boules rouges, 5 blanches et 7 jaunes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage monocolore ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage bicolore ?