$\boxed{1}$ Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$, donner la loi de X, tracer sa fonction de répartition, et calculer son espérance et sa variance.

1. $X_1 =$ le nombre de Pile obtenus en lançant 2 pièces équilibrées.
2. $X_2 =$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche lorsque l'on tire sans remise des boules dans une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches
3. $X_3 =$ le produit de 3 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

$\boxed{2}$ Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame 1 point. Du paquet, on tire simultanément et au hasard 2 cartes. On désigne par X la variable égale au total des points marqués.
Déterminer la loi de X, son espérance et son écart-type.

$\boxed{3}$ On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne plus que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

$\boxed{4}$ On effectue des lancers d'une pièce équilibrée. On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (on admet que presque-sûrement on obtient au moins un Pile). Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

$\boxed{5}$ Soit n un entier strictement supérieur à 3. On considère n personnes qui jouent à « Pile » ou « Face » avec une pièce équilibrée et de façon indépendante.

1. Soit A l'événement : « une seule personne exactement obtient un résultat différent des $(n-1)$ autres personnes ». Calculer la probabilité de A.
2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée « partie ») jusqu'à la réalisation de A. On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.
   Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

$\boxed{6}$ On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces. On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.
Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

$\boxed{7}$ On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 2$.
Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Déterminer $N(\Omega)$.
2. Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(N > k)$. En déduire la loi de N.

$\boxed{8}$ Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :
$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p.$
Déterminer la loi de $Y = X^2$, son espérance et sa variance.

9 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Montrer que : $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)$.

10 Soit X une variable telle que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)-n\mathbb{P}(X>n)$.
2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X>n)$ converge. En déduire que, en cas d'existence,
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$$

11 Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire des boules de la façon suivante : si la boule est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule noire ; si la boule est noire, le jeu s'arrête et on note X le nombre de tirages qui ont été effectués.
Dans le cas où on obtiendrait jamais la boule noire, on note $X=0$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que la variable $X+1$ admet une espérance et donner sa valeur. En déduire l'espérance de X.

12 On lance simultanément deux dés équilibrés A et B. Le dé A porte le nombre « 1 » sur 4 faces et « -2 » sur les deux autres. Le dé B porte les nombres -2, -1, 0, 1, 2, 3.

1. On note X le résultat de A, Y le résultat de B, et $S=|X+Y|$. Déterminer la loi de X et de Y.
2. Déterminer la loi de S puis la loi du couple (X,S). X et S sont-elles indépendantes ?

13 On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.

On note X (respectivement Y) le nombre de Pile obtenu au 1er (resp. 2ème) tirage.

1. Déterminer les lois de $S=X+Y$ et $D=X-Y$.
2. Déterminer la loi de (S,D) et calculer $cov(S,D)$.
3. S et D sont-elles indépendantes ?

14 On considère deux urnes A et B et 4 boules : deux blanches et deux noires.

On choisit au hasard deux boules que l'on place dans l'urne A, les deux autres étant alors placées dans l'urne B. On effectue ensuite une suite de tirages de la façon suivante : à chaque tirage, on extrait au hasard une boule de chaque urne, puis on les remet après les avoir échangées.
On note X_0 le nombre de boules noires initialement dans l'urne A et pour tout $n\geqslant 1$, X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A à l'issue de n tirages (dont juste avant le tirage suivant).
On note, pour tout entier $n\geqslant 0$: $p_n=\mathbb{P}(X_n=0)$, $q_n=\mathbb{P}(X_n=1)$ et $r_n=\mathbb{P}(X_n=2)$.

1. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n\geqslant 1$: $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$.
2. On note $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et préciser P^{-1}. Calculer $P^{-1}MP$. En déduire X_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. En déduire que les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.