CHAPITRE 16

Lois usuelles

1 Schéma de Bernoulli

Définition 1 **Loi de Bernoulli**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que X **suit une loi de Bernoulli de paramètre** p (avec $0 < p < 1$) si :

$$\boxed{X(\Omega) = \{0, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p,\ \mathbb{P}(X = 1 - p) = 1 - p}$$

On note alors :

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)}$$

Remarques :

- **R 1** – On dit donc qu'une variable suit une loi de Bernoulli dès qu'elle a pour support $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Le « paramètre » est alors la probabilité d'obtenir $[X = 1]$.
- **R 2** – Une variable de Bernoulli est associée à une épreuve succès/échec. On réalise une expérience ayant deux issues : un succès (de probabilité p) et un échec (de probabilité $1 - p$). On note alors X le nombre de succès obtenu sur une épreuve : c'est soit 1 ou 0, et X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemples :

- **E 1** – Si on dispose d'une pièce équilibrée et qu'on la lance une fois, alors X le nombre de Pile obtenus suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
- **E 2** – Si on dispose d'une pièce truquée, faisant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$, alors X le nombre de Pile obtenus suit une loi $\mathcal{B}(p)$.
- **E 3** – Dans une urne, on a 2 boules rouges et 6 boules bleues. On pioche une boule au hasard.
  Si on note $X = 1$ si on obtient une boule bleue, et $X = 0$ si on obtient une boule rouge, alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(3/4)$.

Proposition 2
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors X admet une espérance et une variance, et on a :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = p} \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = p(1-p)}$$

Proposition 3
Soient X_1 et X_2 deux variables suivant des lois de Bernoulli. Alors :
X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes $\Longleftrightarrow$ les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont indépendants.

Remarque :

> Deux expériences succès/échec sont donc indépendantes si les événements "obtenir un succès" de chaque expérience sont indépendants.

Définition 4
On appelle **Schéma de Bernoulli** la répétition d'une même expérience succès/échec dans des conditions identiques et indépendantes.
Un Schéma de Bernoulli est donc la donnée d'une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi de Bernoulli de paramètre p fixé.

Remarque :

> L'indépendance signifie ici que, pour tout $n \geqslant 1$, les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

2 Loi géométrique

Proposition 5
Soit $p \in]0,1[$. Dans un schéma de Bernoulli de paramètre p, avec une répétition infinie d'épreuves, on obtient presque-sûrement un succès.

Définition 6
Soit un schéma de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ (i.e. une répétition infinie de même épreuve succès/échec).
Soit T le rang du premier succès :

$$T = \min\{i \geqslant 1 \ / \ [X_i = 1]\}$$

Alors T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et on dit que **T suit une loi géométrique de paramètre p**.
On a :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}}$$

et on note :

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)}$$

Proposition 7

Soit T une variable de loi géométrique de paramètre p. Alors :

- *Pour tout $k \geqslant 1$,*
$$\boxed{\mathbb{P}(T > k) = (1-p)^k}$$
- *Pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $j \geqslant 1$,* $\boxed{\mathbb{P}\left(T > j+k \;\middle|\; T > j\right) = \mathbb{P}(T > k)}$.

Remarque :

> La loi géométrique est dite « sans mémoire ». D'après la dernière propriété, si on a fait j échecs au début de l'expérience, alors l'expérience recommence alors dans les mêmes conditions qu'au départ.

Proposition 8

Soit T une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Alors T admet une espérance et une variance, qui valent :

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{V}[T] = \frac{1-p}{p^2}}$$

3 Loi binômiale

Définition 9

Soit $p \in]0,1[$, et soit un schéma de Bernoulli de paramètre p : $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

La variable S_n compte alors le nombre de succès sur n épreuves d'un schéma de Bernoulli.
On dit alors que S_n **suit une loi binômiale de paramètres** (n,p).
On a $\boxed{S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]}$ et :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

et on note

$$\boxed{S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)}$$

Proposition 10

Soit S_n une variable de loi binômiale de paramètres $n \geqslant 1$ et $p \in]0,1[$. Alors S_n admet une espérance et une variance, qui valent :

$$\boxed{\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1] = np \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{V}[S_n] = n\mathbb{V}[X_1] = np(1-p)}$$

Proposition 11

La somme de deux variables binômiales indépendantes de paramètres (k,p) et (ℓ,p) est une variable de loi binômiale de paramètres $(k+\ell,p)$.

4 Loi de Poisson

Définition 12
Soit $\lambda > 0$.
On dit qu'une variable aléatoire X **suit une loi de Poisson de paramètre** λ si :

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$$

On note alors :

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)}$$

Remarque :

Le modèle est bien possible et cohérent car :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1$$

Ainsi la suite $\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)_{k \geqslant 0}$ définit bien une loi de probabilité.

Proposition 13
Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors X admet une espérance et une variance, qui valent :

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \lambda$$

Théorème 14
Soit (S_n) une suite de variables, suivant chacune une loi binômiale de paramètres (n, p_n). On suppose que $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Alors :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$$

Autrement dit, une suite de lois binômiales de paramètres (n, p_n) converge vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} np_n$.

Remarque :

Le théorème précédent indique donc que la somme S_n d'un grand nombre de variables de loi de Bernoulli indépendantes de petit paramètre suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $\mathbb{E}[S_n]$.

Exemple :

Dans un texte, le nombre de coquilles par page peut être modélisé par une loi de Poisson. Si, dans une collection de qualité et de pagination homogènes, le nombre moyen de coquilles par page a été estimé à 1/2, la probabilité qu'une page donnée ne contienne pas de coquille est de 61% environ.