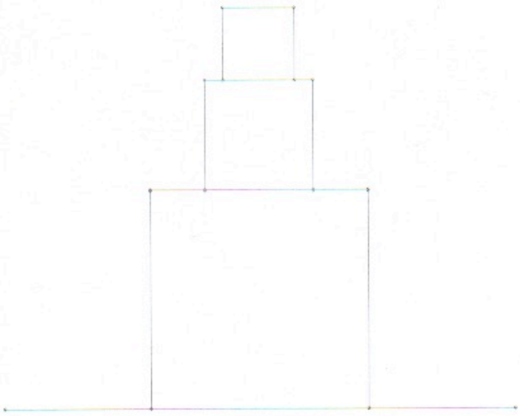
Si vous vous ennuyez… (bis)

Objectif – Ce thème envisage, sous une forme imagée, d'examiner la convergence des « séries » de terme général $\frac{1}{n^3}$, puis $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$. Au-delà des démonstrations proposées, les différences de comportement mettent l'intuition en défaut puisque, dans la situation proposée, le volume et l'aire de la pile de cubes sont majorés, alors que la hauteur ne l'est pas. L'aspect étonnant des résultats est donc le moteur de ce problème.



L'unité est le mètre. On empile sur le sol successivement un cube d'arête 1, un cube d'arête $\frac{1}{2}$, un cube d'arête $\frac{1}{3}$, …, et on continue indéfiniment. On se pose les trois questions suivantes :

1. Trouvera-t-on suffisamment de matière pour fabriquer les cubes ?

2. Trouvera-t-on suffisamment de peinture pour peindre les cubes ?

3. Pourra-t-on atteindre la lune ?

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On fabrique les n premiers cubes dans une matière qui ne produit pas de chute, on les peint sur toutes les faces, puis on les empile. On désigne par :

u_n le volume total de ces cubes, en m^3 ;

S_n l'aire totale de ces cubes, en m^2, et on pose $v_n = \frac{1}{6}S_n$;

w_n la hauteur totale de la pile, en mètres.

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

A. Rappels de cours

Rappelez la nature des séries de Riemann pour un exposant égal à 1, 2 puis 3. En déduire la limite des suites u, v et w.

B. Démonstrations

1. Trouvera-t-on suffisamment de matière pour fabriquer les cubes ?

a) Pour tout n, on pose : $t_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Démontrer que les suites (u_n) et (t_n) sont adjacentes.

b) Etudier la convergence de la suite (u_n).

c) Conclure.

2. Trouvera-t-on suffisamment de peinture pour peindre les cubes ?

a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$: $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

b) Etudier la convergence de la suite (v_n).

c) Conclure.

3. Pourra-t-on atteindre la lune ?

a) Soients les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)+\ln x \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+2)+\ln(x+1).$$

Etudier les sens de variation de f et g, et en déduire leurs signes.

b) Pour tout $n\geq 1$, on pose :

$$a_n=w_n-\ln n \quad \text{et} \quad b_n=w_n-\ln(n+1).$$

Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

c) Etudier la convergence de la suite (w_n).

d) Pourra-t-on atteindre la lune ?

C. Des valeurs numériques

Si la réponse à la question précédente est oui, donner une estimation du nombre de cubes à prévoir, du volume de matière nécessaire et de la surface à peindre.