Khôlle n° 18

Question de cours

Soit $a \in \mathbb{R}$. En admettant que $\ln(1+x) = x + o(x)$ lorsque x est au voisinage de 0, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Exercice 0

Déterminer u_n en fonction de n pour la suite (u_n)est définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

Exercice 1. *Déterminer un équivalent de* $\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)$.

En déduire la limite de $u_n = \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)$.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3

Justifier que pour tout entier n non nul on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En déduire le comportement de la série de terme général $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.