1 Calcul de développements limités

1 Déterminer les développements limités d'ordre 2 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$
3. $f(x) = 3^{x-1}$
4. $f(x) = e^{e^x}$
5. $f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$
6. $f(x) = (1+x)^x$
7. $f(x) = (1+x)^{1/x}$
8. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

2 Déterminer les développements limités d'ordre 3 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$
3. $f(x) = (1+x)^x$
4. $f(x) = e^{\cos(2x)}$
5. $f(x) = e^{1+x}$
6. $f(x) = \dfrac{x\ln(1+x)}{\cos(x)}$
7. $f(x) = \sqrt{1+3\cos(4x)}$
8. $f(x) = \ln(2+\sin(2x))$.
9. $f(x) = \sqrt{3+\sqrt{1+8x^2}}$
10. $f(x) = \mathrm{Arctan}(e^{2x}-1)$.

3 Calculer les limites suivantes:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln(x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{1-\cos(x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+1-e^x}{\sin(x)-x}$.

2 Études de fonctions

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Rappeler le DL d'ordre 2 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.
2. Démontrer que f est continue et dérivable en 0, et préciser $f'(0)$.

5 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1-e^{-t}} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Démontrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [0,+\infty[$.
3. Démontrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 0, et étudier la dérivabilité en 0.
2. Démontrer que pour tout $x>0$, $\ln(x)\leqslant x+1$. En déduire les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de $f(x)-x$ en $+\infty$.
4. Démontrer que f admet un développement limité en 1 d'ordre 2 et le déterminer.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en 0.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$ pour tout réel x.
5. Étudier les variations de f et ses limites et tracer son tableau de variations complet.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que f' n'est pas dérivable en 0. Montrer que f admet cependant un DL d'ordre 2 en 0.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Soit f la fonction définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x)=\frac{2^x-x^2}{x-2}$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 2, et étudier la dérivabilité de ce prolongement en 2.
2. Déterminer la position du graphe de f par rapport à la tangente au point d'abscisse 2.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Montrer que la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

1. Donner le DL d'ordre 2 de f en 0. En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)=x+1+\dfrac{3}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   En déduire que f admet une asymptote et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.