Chap 12

Théorème 13 (p 7)

Preuve

- Soit $N \geq 0$ et $S_N = \sum_{k=0}^{N} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ N+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Si $q \geq 1$ alors la série diverge (grossièrement car $\lim_{k \to +\infty} q^k \geq 1$)

Si $q \leq -1$ alors la série diverge (grossièrement car $\lim_{k \to +\infty} q^k$ n'existe pas)

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{N \to +\infty} S_N = \dfrac{1}{1-q}$ donc la série converge vers $\dfrac{1}{1-q}$

- Soit $p \in \mathbb{N}$ et $N \geq p$ alors $R_{p-1,N} = \sum_{k=p}^{N} q^k$

$$= \begin{cases} q^p \dfrac{1-q^{N-p+1}}{1-q} \\ N-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

On a bien, si $-1 < q < 1$, $\lim_{N \to +\infty} R_{p-1,N} = \dfrac{q^p}{1-q}$