HKBL 2019-2020

Devoir maison n°12

Pour le 25 mars

On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)-1}{x}$.

1. **Etude de f.**
   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
   (b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et étudier le signe de $f'(x)$.
   (d) Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha>0$ tel que $f(\alpha)=0$.
   Justifier que $\alpha \in [1,e]$.

2. **Etude d'une suite réelle.**
   On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante:

$$\begin{cases} u_0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) + u_n \end{cases}$$

   (a) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
   (b) Démontrer que (u_n) est strictement croissante.
   (c) En supposant que (u_n) ait une limite, L, montrer que nécessairement $f(L)=0$.
   En déduire que (u_n) ne peut pas être convergente.

HKBL 2019-2020

Devoir maison n°11

Pour le 18 mars

On désigne par E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de trois réels u_0, u_1 et u_2, et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0. \qquad \text{(R)}$$

1. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 13$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n.
   (c) Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$.
   (d) Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $w_n = u_n - (-2)^n$.
   (a) Vérifier que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.
   (c) Exprimer w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

HKBL 2019-2020

Devoir maison n°13

Pour le 1er avril

Soit a un réel strictement plus grand que 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

Déterminer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que pour tout $n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1/2$.

En déduire que pour $n \geq p$, (u_n) est majorée par une suite géométrique.

Déterminer la limite de (u_n).

On dit que la suite (a^n) est négligeable devant la suite $(n!)$.

Corrigé du devoir maison n°11

1a) $v_0 = u_1 + 2u_0 = 3$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 3$

b) Soit n ∈ ℕ. On a $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$
$= 3(v_n - 2u_n) - 2u_n + 2(v_{n+1} - 2u_{n+1})$
$= 3v_n + 2v_{n+1} - 4(u_{n+1} + 2u_n) = 3v_n + 2v_{n+1} - 4v_n$
$= 2v_{n+1} - v_n$

c) On raisonne par récurrence sur n ∈ ℕ pour montrer P_n: "$v_{n+1} = v_n$ " :
Initialisation : $v_1 = v_0 = 3$ d'après la question 1a).
Hérédité : Soit n ∈ ℕ, on suppose que $v_n = v_{n+1}$ alors

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n = 2v_{n+1} - v_{n+1} = v_{n+1}$$

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet donc elle est vraie pour tout entier n.
La suite (v_n) est constante égale à 3 donc pour tout entier naturel n :
$v_n = 3 = u_{n+1} + 2u_n$ soit $u_{n+1} = -2u_n + 3$

d) (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
1 est la solution de l'équation associée $x = -2x + 3$

donc d'après le chapitre 1, (u_n-1) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme u_0-1= 4=3 ainsi pour tout entier n on a : $u_n - 1 = 3(-2)^n$ soit

$$u_n = 3(-2)^n + 1$$

e) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 3\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} + n + 1 = 1 - (-2)^{n+1} + n + 1 = -(-2)^{n+1} + n + 2$$

2a) $w_0 = 1$; $w_1 = 0$ et $w_2 = -1$ donc on a bien $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$

b) On raisonne par récurrence sur n ∈ ℕ pour montrer P_n:"$w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n$ " :
<u>Initialisation :</u> La propriété P_0 est vraie d'après la question 2a).
<u>Hérédité :</u> Soit n ∈ ℕ, on suppose que P_n est vraie alors

$$\begin{aligned} w_{n+3} &= u_{n+3} - (-2)^{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n - (-2)^{n+3} \\ &= 3(\ w_{n+1} + (-2)^{n+1}) - 2(w_n + (-2)^n)\ - (-2)^{n+3} \\ &= 3\ w_{n+1} - 2w_n +\ 3(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} - 4(-2)^{n+1} \\ &= 3\ w_{n+1} - 2(2w_{n+1} - w_{n+2})\ =\ 2w_{n+2} - w_{n+1} \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet donc elle est vraie pour tout entier n.

c) La suite (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ ainsi il existe λ et μ des réels tels que pour tout entier n w_n= λ + μn. Avec $w_0 = 1 = \lambda$ et $w_1 = 0 = \lambda + \mu$ on obtient w_n= 1 - n.

d) Pour tout entier n on a : $u_n = w_n + (-2)^n =$ 1 - $n + (-2)^n$

e) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et la somme des premiers entiers on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$$

HKBL 2019-2020

Corrigé du devoir maison n°12

1a) Par croissances comparées on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc par opérations on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe de f.

b) $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ donc par opérations on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) f est dérivable sur]0 ;+∞[en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$>0

d) La fonction f est continue et strictement croissante sur]0 ;+∞[à valeurs dans ℝ, or 0 ∈ ℝ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$. On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ donc $\alpha \in]1; e[$.

2a) On raisonne par récurrence sur n ∈ ℕ :
<u>Initialisation :</u> $u_0 = e > \alpha$ d'après la question précédente.

Hérédité : Soit n ∈ ℕ, on suppose que $u_n > \alpha$ alors, la fonction f étant strictement croissante on a : $f(u_n) > f(\alpha) = 0$ puis $u_{n+1} = f(u_n) + u_n > u_n > \alpha$ par hypothèse de récurrence.
Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet donc elle est vraie pour tout entier n.

b) Soit n ∈ ℕ. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) > f(\alpha) = 0$ donc la suite est strictement croissante.

c) En supposant que la suite admet une limite finie L on a nécessairement $L = f(L) + L$ soit $f(L) = 0$ ainsi $L = \alpha$ ce qui est impossible car la suite est strictement croissante et $u_0 > \alpha$. La suite n'admet donc pas de limite finie, étant strictement croissante on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$