Exemples de suites adjacentes (p.7)

- Montrons que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ $(n \geq 1)$ est croissante :

  Soit $n \geq 1$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ (somme télescopique)

- Montrons que la suite définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$ $(n \geq 1)$ est décroissante :

  Soit $n \geq 1$. On a
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$
$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

- Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

  Soit $n \geq 1$. On a $u_n - v_n = -\frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elle convergent vers la même limite finie.