1

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer la matrice canonique associée, le noyau, l'image et le rang. En déduire si l'application est injective, surjective, bijective.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x - y, x - y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y, 3x + y + z)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y, z - x)$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (0, 5y - 2z)$
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y, x, 5y)$
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (2x + y, x + y)$

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x - y, x - y)$ a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   On a donc $\mathrm{Im}(f) = Vect\Big((1, 1), (-1, -1)\Big) = Vect\Big((1, 1)\Big)$, avec donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

   Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   Enfin, puisque $C_1 + C_2 = 0$, on a donc $\mathrm{Ker}(f) = Vect\Big((1, 1)\Big)$.

   L'application f est donc ni injective, ni surjective.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y, 3x + y + z)$ a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, et $\mathrm{Im}(f)$ est au moins de dimension 2 (car contient $((2, 3), (3, 1))$ qui est libre, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$.
   Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   Enfin, puisque $3C_1 - 2C_2 - 7C_3 = 0$, on a donc $\mathrm{Ker}(f) = Vect\Big((3, -2, -7)\Big)$.

   L'application f est surjective, mais non injective.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y, z - x)$ a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (puisque contient $(1, 0)$ et $(0, 1)$), donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
   Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   Enfin, puisque $C_1 - C_2 + C_3 = 0$, on a donc $\mathrm{Ker}(f) = Vect\Big((1, -1, 1)\Big)$.

   L'application f est surjective, mais non injective.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (0, 5y - 2z)$ a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

   On a $\mathrm{Im}(f) = Vect\Big((0, 1)\Big)$ donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

   Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

   Enfin, puisque $C_1 = 0$ et $2C_2 + 5C_3 = 0$, on a donc $\mathrm{Ker}(f) = Vect\Big((1, 0, 0), (0, 2, 5)\Big)$.

   L'application f est surjective, mais non injective.

5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y, x, 5y)$ a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a $\mathrm{Im}(f) = Vect\Big((1, 1, 0), (0, -2, 5)\Big)$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

   Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   Enfin, puisque $C_3 = 0$, on a directement que $\mathrm{Ker}(f) = Vect\Big((0, 0, 1)\Big)$.

   L'application f n'est ni surjective, ni injective.

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (2x + y, x + y)$ a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $\mathrm{Im}(f) = Vect\Big((2, 1), (1, 1)\Big)$, donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
   Or, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, donc on a nécessairement $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
   Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
   L'application f est alors surjective et injective, autrement dit bijective.

2

Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,2)=2$ et $f(-2,1)=5$.
Déterminer alors le noyau et l'image de f.

ANALYSE.
Si f est une forme linéaire, f s'écrit sous la forme :

$$f(x,y)=ax+by, \quad \text{avec } a,b\in\mathbb{R}$$

Si f convient au problème, on doit avoir $a+2b=2$ et $-2a+b=5$, donc on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{l} a+2b=2 \\ -2a+b=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5b=9 \\ 5a=-8 \end{array}\right. \Longrightarrow a=\frac{-8}{5} \quad \text{et} \quad b=\frac{9}{5}$$

SYNTHESE.
Posons :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\frac{-8}{5}x+\frac{9}{5}y$$

Alors f est bien une forme linéaire, et vérifie $f(1,2)=2$ et $f(-2,1)=5$.
Il existe donc bien une unique forme linéaire f répondant au problème.

Remarquons que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$ et $\mathrm{Ker}(f)=Vect\left((9,8)\right)$.

3 Soient les applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, x+2y, y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{array}.$$

1. Déterminer l'image et le noyau de f et de g.
2. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$. Préciser $(g \circ f)^{-1}$.
3. L'application $f \circ g$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

1. $\text{Im}(f) = Vect((1,1,0),(0,2,1))$. Par théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
   On a $\text{Im}(g) = Vect((1,5),(0,-2),(1,1))$. $\text{Im}(g)$ étant de dimension au moins 2 (car contient au moins deux vecteurs non colinéaires), dans $\mathbb{R}^2$, on a nécessairement $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.
   Et $\text{Ker}(g) = \{(x,y,z) \ / \ x+z = 0 \text{ et } 5x-2y+z\} = \{(x, 2x, -x), x \in \mathbb{R}\} = Vect((1,2,-1))$.
2. Par composition, on a bien $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, et pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$,

   $$g \circ f(x,y) = g(x, x+2y, y) = (x+y, 5x - 2(x+2y) + y) = (x+y, 3x-3y)$$

   Remarquons que $\text{Im}(g \circ f) = Vect((1,3),(1,-3))$ de dimension 2, donc $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$, et par théorème du rang, $\text{Ker}(g \circ f) = \{0\}$.
   Ainsi, $g \circ f$ est bien bijectif et $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   De plus, pour (x,y) de $\mathbb{R}^2$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

   $$\begin{cases} x+y = a \\ 3x-3y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3a+b}{6} \\ y = \dfrac{3a-b}{6} \end{cases}$$

   Donc :

   $$(g \circ f)^{-1} : (a,b) \longmapsto \left(\frac{3}{6}a + \frac{1}{6}b, \frac{3}{6}a - \frac{1}{6}b\right)$$
3. $f \circ g$ ne peut pas être un bijectif puisque $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ et $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$.

4

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\varphi(x,y) = (x+y, x+y)$, et soit $f = \varphi + Id_{\mathbb{R}^2}$. Calculer φ^n, puis f^n.

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(x,y) = (x+y, x+y)$$
puis
$$\varphi^2(x,y) = ((x+y)+(x+y),(x+y)+(x+y)) = (2x+2y, 2x+2y) = 2(x+y, x+y) = 2\varphi(x,y)$$
puis
$$\varphi^3(x,y) = \varphi(\varphi^2(x,y)) = \varphi(2\varphi(x,y)) = 2\varphi^2(x,y) = 2^2\varphi(x,y)$$
puis par une récurrence immédiate, on a :
$$\forall n \geqslant 1,\ \varphi^n(x,y) = 2^{n-1}\varphi(x,y) = 2^{n-1}(x,y)$$

2. On pose $f = \varphi + Id$, autrement dit :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2x+y, x+2y)$$
On a pour $n \geqslant 1$,
$$f^n = (\varphi + Id)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k$$
donc pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f^n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k(x,y) = (x,y) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}\varphi(x,y)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k\right)\varphi(x,y) - (y,x) = \left(1 + \frac{3^n-1}{2}\right)(x+y, x+y) - (y,x)$$

5

1. Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$f(x,y,z) = (2x+3y+5z, x+y+6z)$$
Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$f(x,y,z) = (2x+3y+5z, x+y+6z, z)$$
Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. f a pour matrice canonique associée :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
2. f a pour matrice canonique associée :
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(M) = Vect(C_1, C_2, C_3)$ avec C_1, C_2, C_3 les colonnes de M.
Remarquons que le rang de f vaut au moins 2 puisque (C_1, C_3) forme une famille libre.
De plus, $C_2 = 4C_1 - 3C_3$, donc le rang de f vaut exactement 2 et :

$$\mathrm{Im}(f) = Vect(C_1, C_3) = Vect\Big((1, -1, 0), (1, -2, -1)\Big)$$

Par théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
or, $4C_1 - C_2 - 3C_3 = 0$, donc $(4, -1, -3) \in \mathrm{Ker}(f)$, et c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = Vect((4, -1, -3))$$

7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé canoniquement à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Décomposer le vecteur $u = (1,1,1)$ dans $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

1. Remarquons que le rang de f (et de M) est au moins de 2 puisqu'il y a au moins deux colonnes non proportionnelles. De plus, $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$.
   Finalement, $\mathrm{rg}(f) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, et on a donc par exemple :
   $$\mathrm{Im}(f) = Vect\Big((2,-1,-1),(-1,2,-1)\Big), \qquad \mathrm{Ker}(f) = Vect\Big((1,1,1)\Big)$$
2. Posons $\mathcal{B} = \Big((2,-1,-1),(-1,2,-1),(1,1,1)\Big)$ obtenue en concaténant une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.
   $$a(2,-1,-1) + b(-1,2,-1) + c(1,1,1) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \\ -a - b + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$
   Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre, et de cardinal 3, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc :
   $$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$
3. De manière évidente, puisque $u \in \mathrm{Ker}(f)$, on a :
   $$u = u + 0 \in \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

8

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$f \circ g = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ g = 0 &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f \circ g(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(g(x)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ g(x) \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g) \end{aligned}$$

9

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

1. Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

$$x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \exists y \in E \ / \ x = f(y) \end{array} \right. \Longrightarrow f^2(y) = 0 \Longrightarrow y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow x = f(y) = 0$$

   Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

   Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   On sait déjà que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, cette inclusion est toujours vraie.
   De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, on a $f^2(x) = 0$, donc $f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, d'où $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
   Ainsi, par double inclusion, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, l'inclusion est toujour vraie.
   Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$ et donc $f(x - f(z)) = 0$.
   On peut alors écrire $x = f(z) + (x - f(z)) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
   L'autre inclusion étant évidente, on a bien :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

   Réciproquement, supposons que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
   On sait déjà que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   Par ailleurs, si $x \in \mathrm{Im}(f)$, on peut écrire $x = f(u)$ avec $u \in E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Donc $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $u_2 \in \mathrm{Im}(f)$: on peut écrire $u_2 = f(z)$ avec $z \in E$ et finalement :

$$x = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + f(f(z)) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$$

   Ainsi, on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

10

Soient f et g deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injectif } \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\} \text{ et } \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

$$g \circ f \text{ surjectif } \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = E \text{ et } \mathrm{Im}(g) = E$$

• Supposons $g \circ f$ est injectif, alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$.

- ⋆ si $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$, on a $g(x) = 0$ et $x = f(u)$, donc $g(f(u)) = 0$, mais alors $u \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, donc $u = 0$ et donc $x = f(u) = f(0) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$.

- ⋆ si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$, donc $g(f(x)) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, donc $x = 0$.

Ainsi, on a bien $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons qu'on ait $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Montrons que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, on a $g(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, donc $f(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$ et $g \circ f$ est injectif.

• Supposons $g \circ f$ surjectif.
Alors pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = g \circ f(u)$, donc $x = g(f(u)) \in \mathrm{Im}(g)$, donc $E = \mathrm{Im}(g)$.

De plus, pour tout $x \in E$, montrons que $x \in \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$.
Analyse : si on écrit $x = y + f(z)$ avec $y \in \mathrm{Ker}(g)$ et $z \in E$, alors $g(x) = 0 + g(f(z))$: z est donc lié à $g(x)$.
Synthèse.
Soit $x \in E$. Alors $g(x) \in E$ aussi. Or, $g \circ f$ est surjective, donc il existe un $z \in E$ tel que $g(x) = g \circ f(z)$. On peut alors écrire $x = (x - f(z)) + f(z)$. On a $g(x - f(z)) = 0$, donc $x - f(z) \in \mathrm{Ker}(g)$, donc on a bien écrit x dans $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$.

11

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont en somme directe.
Montrer que si $x \notin \text{Ker}(\varphi)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(x) \neq 0$.

On suppose que $\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0\}$.
Montrons que $x \notin \text{Ker}(\varphi) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi^n(x) \neq 0$.
Montrons en fait plutôt la contraposée : montrons que :

$$\exists n \in \mathbb{N} \ / \ \varphi^n(x) = 0 \Longrightarrow x \in \text{Ker}(\varphi)$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^n(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(\varphi^{n-1}(x)) = 0$
Alors $\varphi^{n-1}(x) \in \text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi)$, donc $\varphi^{n-1}(x) = 0$.
Mais alors de même $\varphi(\varphi^{n-2}(x)) = 0$, donc $\varphi^{n-2} \in \text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
En réitérant ce raisonnement n fois, on montre successivement que $\varphi^{n-1}(x) = 0$, $\varphi^{n-2}(x) = 0$, $\ldots$, $\varphi^2(x)$ et $\varphi(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(\varphi)$.

12

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f + Id_E$.
Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.

On a $f^3 - f^2 - f = Id_E$, donc $\left\{ \begin{array}{l} f \circ (f^2 - f - Id_E) = Id_E \\ (f^2 - f - Id_E) \circ f = Id_E \end{array} \right.$, donc f est bijectif et on a $f^{-1} = f^2 - f - Id_E$.

13

Soit $E = \mathbb{R}^n$. On appelle **projecteur dans** E tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - Id_E)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

1. Si $x \in \text{Im}(f)$, alors il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$.
Mais alors :
$$(f - Id_E)(x) = f(x) - x = f(f(z)) - f(z) = f(z) - f(z) = 0$$
donc $x \in \text{Ker}(f - Id_E)$.
Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(f - Id_E)$, on a $f(x) = x$, donc $x = f(x) \in \text{Im}(f)$.
Par double inclusion, on a donc bien que :
$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - Id_E)}$$

2. **Méthode 1**
Montrons par analyse/synthèse que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
ANALYSE
Soit $x \in E$. Supposons que $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(f)$.
On a $f(y) = 0$ et puisque $z \in \text{Im}(f) = \text{Ker}(f - Id_E)$, on a donc $f(z) = z$.
Ainsi, $x = y + z$ et $f(x) = f(y) + f(z) = 0 + z$.
Nécessairement on a donc $z = f(x)$ et $y = x - z = x - f(x)$. Si x s'écrit dans $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, alors l'écriture est unique.

SYNTHESE.
Soit $x \in E$. On peut écrire :
$$x = (x - f(x)) + f(x)$$
De plus, $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$: $x - f(x) \in \text{Ker}(f)$.
et $f(x) \in \text{Im}(f)$ par définition.
Ainsi, tout vecteur x de E s'écrit comme somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f)$ et d'un vecteur de $\text{Im}(f)$, et l'écriture est unique d'après l'analyse. On a donc bien que :
$$\boxed{E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)}$$

Méthode 2
Si $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, on a $f(x) = 0$ et $f(x) = x$, donc $x = 0$.
Ainsi, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$: $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.
De plus, $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \subset E$ et $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ avec le théorème du rang, donc :
$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$$

14

Soit $E = \mathbb{R}^n$. On appelle **symétrie dans** E tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = Id_E$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f + Id_E)$.
2. Montrer que $E = \text{Im}(f - Id_E) \oplus \text{Im}(f + Id_E)$.

1. Montrons par analyse/synthèse que $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f + Id_E)$.
   ANALYSE
   Soit $x \in E$. Supposons que $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f - Id_E)$ et $z \in \text{Ker}(f + Id_E)$.
   On a $f(y) = y$ et $f(z) = -z$. Ainsi, $x = y + z$ et $f(x) = f(y) + f(z) = y - z$.
   Alors $\left| \begin{array}{l} x = y + z \\ f(x) = y - z \end{array} \right. \implies y = \frac{x+f(x)}{2}$ et $z = \frac{x-f(x)}{2}$ Si x s'écrit dans $\text{Ker}(f - Id_E) + \text{Ker}(f + Id_E)$, alors l'écriture est unique.

   SYNTHESE.
   Soit $x \in E$. On peut écrire :
   $$x = \left(\frac{x + f(x)}{2}\right) + \left(\frac{x - f(x)}{2}\right)$$
   De plus, $(f - Id_E)\left(\frac{x+f(x)}{2}\right) = (f - Id_E)(f + Id_E)\left(\frac{x}{2}\right) = (f \circ f - Id_E)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
   et $(f + Id_E)\left(\frac{x-f(x)}{2}\right) = (f + Id_E)(Id_E - f)\left(\frac{x}{2}\right) = (Id_E - f \circ f)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.
   Ainsi, tout vecteur x de E s'écrit comme somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f - Id_E)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(f + Id_E)$, et l'écriture est unique d'après l'analyse. On a donc bien que :
   $$\boxed{E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f + Id_E)}$$

2. On a :
   $$Id_E = -\frac{1}{2}(f - Id_E) + \frac{1}{2}(f + Id_E)$$
   Pour tout $x \in E$, on a donc :
   $$x = -\frac{1}{2}(f - Id_E)(x) + \frac{1}{2}(f + Id_E)(x) = (f - Id_E)\left(-\frac{x}{2}\right) + (f + Id_E)\left(\frac{x}{2}\right) \in \text{Im}(f - Id_E) + \text{Im}(f + Id_E)$$
   Ainsi, on a bien :
   $$E = \text{Im}(f - Id_E) + \text{Im}(f + Id_E)$$
   et les deux ensembles sont bien en somme directe car $(f - Id_E) \circ (f + Id_E) = 0$ et $(f + Id_E) \circ (f - Id_E) = 0$, donc on a $\text{Im}(f + Id_E) \subset \text{Ker}(f - Id_E)$ et $\text{Im}(f - Id_E) \subset \text{Ker}(f + Id_E)$. Ainsi :
   $$\text{Im}(f - Id_E) \cap \text{Im}(f + Id_E) \subset \text{Ker}(f + Id_E) \cap \text{Ker}(f - Id_E) = \{0\}$$
   Ainsi, les deux images sont bien en somme directe aussi, et on a :
   $$\boxed{E = \text{Im}(f - Id_E) \oplus \text{Im}(f + Id_E)}$$

15

Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f n'est pas un isomorphisme de E.
2. Montrer que $Id_E - f$ et $Id_E + f$ sont des isomorphismes de E.

1. Par l'absurde.
   Supposons que f soit un isomorphisme, donc bijectif, alors $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ serait alors bijectif (composée d'applications bijectives). Or $f^k = 0$, donc f^k n'est pas bijectif !
   Ainsi, f ne peut pas être un isomorphisme de E.
2. $(Id_E - f)\circ(Id_E + f + f^2 + \cdots + f^{k-1}) = Id_E - f^k = Id_E$ et de même, $(Id_E + f + f^2 + \cdots + f^{k-1})\circ(Id_E - f) = Id_E$.
   Ainsi, $Id_E - f$ est bijectif et on a même :

   $$\boxed{(Id_E - f)^{-1} = Id_E + f + f^2 + \cdots + f^{k-1}}$$

   En remplaçant f par $-f$ (qui vérifie encore $(-f)^k = 0$), $Id_E + f$ est bijectif aussi, et on a :

   $$\boxed{(Id_E + f)^{-1} = Id_E - f + f^2 - f^3 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1}}$$

16

Soit $E = \mathbb{R}^n$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.
   Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g + g^3 = 0$.
   Montrer que $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g^2)$.
3. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.
   Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

1. ANALYSE.
   Soit $x \in E$. Supposons qu'on puisse écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.
   On aurait alors $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = 2x_2$.
   Nécessairement $f(x) = x_1 + 2x_2$ et $x = x_1 + x_2$, donc $x_2 = \boxed{f(x) - x}$ et $x_1 = x - x_2 = \boxed{2x - f(x)}$.
   On donc que, si la décomposition existe, elle est unique.
   SYNTHESE.
   Soit $x \in E$. Alors on peut écrire $x = (2x - f(x)) + (f(x) - x)$. On a alors :
   - $(f - Id_E)(2x - f(x)) = (f^2 - 3f + 2Id_E)(-x) = 0$, donc $2x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.
   - $(f - 2Id_E)(f(x) - x) = (f^2 - 3f + 2Id_E)(x) = 0$, donc $f(x) - x \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

   Ainsi, on a bien écrit tout vecteur x de E comme vecteur de $\mathrm{Ker}(f - Id_E) + \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$. La décomposition étant unique d'après l'analyse, on a bien :
   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)}$$
2. ANALYSE.
   Soit $x \in E$. Supposons qu'on puisse écrire $x = y + g^2(z)$ avec $y \in \mathrm{Ker}(g)$ et $z \in E$. Alors $g(x) = g(y) + g^3(z) = 0 - g(z)$, donc $g^2(z) = -g^2(x)$, et donc $y = x + g^2(x)$.
   Si la décomposition existe, elle est unique.
   SYNTHESE.
   Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x + g^2(x)) - g^2(x) = (x + g^2(x)) + g^2(-x)$.
   On a $g(x + g^2(x)) = g(x) + g^3(x) = 0$, donc $x + g^2(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ et $g^2(-x) \in \mathrm{Im}(g^2)$.
   On a donc bien démontré que :
   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g^2)}$$
3. ANALYSE.
   Soit $x \in E$. Supposons qu'on écrive $x = y + v(z)$ avec $y \in \mathrm{Ker}(u)$.
   Alors on aurait $u(x) = 0 + u \circ v(z)$, puis $v \circ u(x) = v \circ u \circ v(z) = v(z)$. Donc $v(z) = v \circ u(x)$ et $y = x - v \circ u(x)$.
   Si la décomposition existe, elle est unique.
   SYNTHESE.
   Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x - v \circ u(x)) + (v \circ u(x))$.
   On a clairement $v \circ u(x) \in \mathrm{Im}(v)$, et on a $u(x - v \circ u(x)) = 0$.
   Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(v)$, et la décomposition est unique d'après la partie analyse.
   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)}$$

17

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \Longleftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\ \text{rg}(f)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$.
Supposons qu'on ait $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
Alors le fait que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ traduit exactement que $f^2 = 0$.
De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 2\dim(\text{Im}(f)) = 2\text{rg}(f)$, donc $n = 2\text{rg}(f)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$.
Supposons qu'on ait $f^2 = 0$ et $n = 2\text{rg}(f)$.
L'affirmation $f^2 = 0$ fournit que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
De plus, $\dim(\text{Im}(f)) = \frac{n}{2}$ par hypothèse, et par théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = n - \text{rg}(f) = n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{n}{2}$.
Ainsi, une inclusion et mêmes dimensions, on a donc $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

$\boxed{\textbf{18}}$

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que : $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
2. Montrer que : $$\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\} \\ \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E \end{array} \right.$$

1. On a :
$$\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$$
D'où :
$$\dim(\text{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$
On a donc bien :
$$\boxed{\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)}$$

2. $\boxed{\Longrightarrow}$.
Supposons qu'on ait $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
Alors cela signifie que, toutes les inégalités dans la question précédente sont des égalités. Nécessairement, on doit avoir
$$\dim(\text{Im}(f+g)) = \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = 0$$
Ainsi, on a forcément $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\}$.

Mais alors en emarquant que
$$\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f+g) \quad \text{d'où} \quad \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f+g))$$

$$\begin{aligned}
\dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) &= \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) \\
&\geqslant \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)) - \dim(\text{Ker}(f+g)) \\
&= (\dim(E) - \text{rg}(f)) + \dim(E) - \text{rg}(g) - \dim(E) + \text{rg}(f+g) = \dim(E)
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) \subset E$, avec $\dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) \geqslant \dim(E)$, on a donc $E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$.
Supposons qu'on ait $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\}$ et $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$.
Montrons que $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
L'inclusion $\subset$ est toujours vraie.
Réciproquement. Soit $x \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$: on peut écrire $x = f(y) + g(z)$.
On écrit $y = y_1 + y_2$ et $z = z_1 + z_2$ avec $y_1, z_1 \in \text{Ker}(f)$ et $y_2, z_2 \in \text{Ker}(g)$,
$$x = f(y) + g(z) = f(y_1 + y_2) + g(z_1 + z_2) = f(y_2) + g(z_1) = f(z_1 + y_2) + g(z_1 + y_2) = (f+g)(z_1 + y_2)$$
Donc on a bien $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$ et on a donc bien $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

19

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $E = \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$$
2. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u+v$ bijectif. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$.

1. Comme dans la question précédente, on a pour toutes applications f et g
$$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$
autrement dit :
$$\mathrm{rg}(f+g) - \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$$
Pour $f = -v$ et $g = u+v$, on a alors :
$$\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$$
Et pour $f = -u$ et $g = u+v$, on a :
$$\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$$
Donc finalement :
$$\boxed{|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)}$$
2. On suppose que $u \circ v = 0$. Ainsi, on a $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. On en déduit que :
$$\mathrm{rg}(v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u) \Longrightarrow \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$$
De plus, si $u+v$ est bijectif alors $\mathrm{rg}(u+v) = n$, donc en utilisant $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ on obtient:
$$n = \mathrm{rg}(u+v) = \dim(\mathrm{Im}(u+v)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$
Ainsi, on a donc $n \geqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ et $n \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$, donc :
$$\boxed{\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n}$$

20

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

— Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ (i.e. que la somme est directe).
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On a alors $f(x) = 0$ et $x = f(y)$ avec $y \in E$.
On peut donc écrire $f^2(y) = 0$. D'où $f(f^2(y)) = f(0)$, autrement dit $f^3(y) = 0$, donc $f(y) = 0$, d'où $x = 0$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}}$$

— Ainsi, on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \subset E$ et par théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Donc par une inclusion et mêmes dimensions, on a bien :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E}$$

21

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}[E)$. Montrer que sont équivalents :

(i) $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$

(ii) $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$

(iii) $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

(iv) $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.

(v) $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.

(ii)⇒(i) Supposons que $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$.
On sait déjà que l'inclusion $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ est toujours vraie.
De plus en appliquant le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(E) - \operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \operatorname{rg}(f^2) = \dim(\operatorname{Ker}(f^2))$$

on a donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)}$$

(i)⇒(iv) Supposons que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.
Si $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, alors $f(x) = 0$ et $x = f(w)$ pour $w \in E$.
Ainsi, $f^2(w) = 0$, donc $w \in \operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, donc $x = f(w) = 0$, donc $x = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}}$$

(iv)⇒(v) Supposons qu'on ait $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
On sait déjà que $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) \subset E$.
De plus, par formule de Grassmann et en utilisant le théorème du rang, on a :
$\dim(\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) - \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)) = \dim(E) - 0$.
Avec une inclusion et égalité des dimensions, on a donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E}$$

(v)⇒(iii) Supposons qu'on ait $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.
Alors :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) - \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f))$$

Ainsi, on a nécessairement $\dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)) = 0$, donc $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$ et donc $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe, on a donc bien :

$$\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$$

(iii)⇒(ii) Supposons qu'on ait $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.
On sait déjà que l'inclusion $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ est toujours vraie.
Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im}(f)$, on peut écrire $x = f(u)$ avec $u \in E$, donc $u \in \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$, on peut donc écrire $u = v + f(w)$ avec $v \in \operatorname{Ker}(f)$ et $w \in E$.
Finalement, on a $x = f(u) = f(v + f(w)) = f(v) + f(f(w)) = f^2(w) \in \operatorname{Im}(f^2)$.
Ainsi, par double inclusion, on a :

$$\boxed{\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)}$$

La boucle est bouclée!

22

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

1. On sait que $f^2 \neq 0$, donc il existe au moins un vecteur u de E tel que $f^2(u) \neq 0$.
   Remarquons que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est nécessairement libre.

   Prenons a, b, c trois scalaires tels que :
   $$au + bf(u) + cf^2(u) = 0_E$$
   En composant par f^2, on obtient :
   $$af^2(u) = 0_E$$
   ce qui implique nécessairement que $a = 0$ (puisque $f^2(u) \neq 0_E$).
   Mais alors en revenant à l'équation précédente, on a :
   $$bf(u) + cf^2(u) = 0_E$$
   En composant par f, on obtient :
   $$bf^2(u) = 0_E, \qquad \text{donc } b = 0$$
   et finalement, puisqu'on obtient $cf^2(u) = 0$, on a aussi $c = 0$.
   Finalement, on a forcément $a = b = c = 0$, la famille est libre, dans $E = \mathbb{R}^3$, c'est donc même une base de E.
2. La famille $(f(u), f^2(u))$ comporte deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$, et est libre (ils appartiennent à la base précédente), donc nécessairement $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 2$.
   De plus, on ne peut pas avoir $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ car cela signifierait que $\mathrm{Im}(f) = E$, donc f surjective, donc bijective.
   Or, $f^3 = 0$, donc f^3 non bijective, donc f ne peut pas être bijective.
   Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Le théorème du rang dit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   Or, on a $f^3 = 0$, donc $f \circ f^2 = 0$, donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   Nécessairement, on a donc soit $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 0$ ou $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 1$. Or, on sait que $f^2 \neq 0$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 1$.
   Finalement, $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$, avec mêmes dimensions, donc :
   $$\boxed{\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)}$$
4. On a $f^3 = 0$, donc $f^2 \circ f = 0$, donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
   De plus, avec théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.
   Avec une inclusion et mêmes dimensions, on a donc bien que :
   $$\boxed{\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Im}(f)}$$

23

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe un $x \neq 0$ tel que $(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ soit une base de E.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que $f^n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

1. f étant un endomorphisme en dimension finie, pour montrer qu'il est bijectif il suffit de vérifier qu'il est injectif ou surjectif.
   Or, on a supposé que $E = Vect(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$, donc en particulier, $E \subset \text{Im}(f)$, f est surjective, donc bijective.
2. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$$
   En composant par f, on obtient :
   $$\lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^n(x) = 0_E$$
   Or, la famille $(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ est libre (c'est une base), donc on a forcément $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.
   La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est donc libre, et comporte n éléments, c'est une base de E.
3. Ainsi, le vecteur $f^n(x)$ peut s'écrire dans cette base, il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :
   $$f^n(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$$
   Montrons que :
   $$\forall u \in E,\ f^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(u)$$
   (ça fonctionne pour le vecteur x bien particulier, est-ce que cela marche pour tous les autres ?)
   En fait, il suffit de vérifier que cela fonctionne pour tous les vecteurs d'une base de E.
   Prenons $f^j(x)$ avec $j \in [\![0, n-1]\!]$, alors :
   $$f^n(f^j(x)) = f^{n+j}(x)$$
   et
   $$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^j(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+j}(x) = f^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)\right) = f^j(f^n(x)) = f^{n+j}(x)$$
   Donc on a bien, en notant $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ la base de E trouvée à la question 2,
   $$\forall u \in \mathcal{B},\ f^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(u)$$
   Ainsi, les applications f^n et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coincident sur une base de E, elles sont égales.

24

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Quels produits peut-on calculer entre A, B, C, D ? Les calculer.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},\ CA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix},\ BD = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ CD = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

25

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n en fonction de n.
2. Soit $B = A - I_2$. Calculer B^n en fonction de n.

1. On a $A^0 = I_2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule facilement que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, donc pour tout $n \geqslant 2$, $A^n = 0$. La matrice A est nilpotente d'ordre 2.
2. Soit $B = A - I_2$. On a d'après la Formule du Binôme de Newton (valide puisque A et I_2 commutent)

$$\begin{aligned} B^n = (A - I_2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-I_2)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} A^0 (-I_2)^0 + \binom{n}{1} A^1 (-I_2)^{n-1} \\ &\quad \text{(les autres termes sont nuls puisque } A^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 2) \\ &= I_2 + nA(-1)^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n-1} n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + n(-1)^{n-1} & n(-1)^{n-1} \\ n(-1)^n & 1 + n(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

26

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En écrivant $B = I_3 + A$ (où A est à déterminer), calculer B^n en fonction de n pour tout $n \geqslant 3$.

On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons les puissances de la matrice A. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \forall k \geqslant 3, A^k = 0$$

La matrice A est donc nilpotente d'ordre 3.

On a donc $B^0 = I_3$ et $B^1 = B$ et pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
B^n = (I_3 + A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \quad \text{(par Binôme, puisque } A \text{ et } I_3 \text{ commutent)} \\
&= \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 \\
&= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

27

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

On écrit $A = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule rapidement que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$: la matrice N est nilpotente.

D'où, avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, A^k = (I+N)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j \\ &= I + nN + \frac{n-1}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 2n + \frac{3n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

28

Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n telles que le produit AB soit inversible.
Montrer que les matrices A, B et BA sont également inversibles.

Supposons AB inversible. Alors il existe une matrice C de taille n telle que $(AB)C = C(AB) = I_n$.
Mais alors $A(BC) = I$, donc A est inversible à droite, donc inversible.
De même, $(CA)B = I$, donc B est inversible à gauche, donc inversible.
Enfin, puisque A et B sont inversibles, alors BA est bien inversible par produit de matrices inversibles.

29

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A, B et $B-A$ soient inversibles.
Montrer que $A^{-1}-B^{-1}$ est inversible et que $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}=B(B-A)^{-1}A$.

On a :

$$(A^{-1}-B^{-1})B(B-A)^{-1}A=(A^{-1}B-I)(B-A)^{-1}A=A^{-1}(B-A)(B-A)^{-1}A=A^{-1}A=I$$

Donc $A^{-1}-B^{-1}$ est inversible à droite, donc inversible et son inverse est bien

$$(A^{-1}-B^{-1})^{-1}=B(B-A)^{-1}A$$

30

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(M - I)(M + 3I)$ où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire M^2 en fonction de M et I.
3. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

1. On a $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Puis, après calculs, $(M - I)(M + 3I) = 0$.
2. On a $(M - I)(M + 3I) = M^2 + 3M - M - 3I = M^2 + 2M - 3I$. Puisque $(M - I)(M + 3I) = 0$, on en déduit que
$$M^2 = -2M + 3I$$
3. $$M^2 + 2M - 3I = 0 \iff M^2 + 2M = 3I \iff M(M + 2I) = 3I \iff M\left(\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}I\right) = I$$
Donc M est inversible à droite, donc inversible et son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}I$.

31

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - (2+x)M + (1+x-2x^2)I_3$.
2. En déduire pour quelles valeurs de x la matrice M est inversible.

1. On a facilement $M^2 = \begin{pmatrix} 1+2x^2 & 2x+x^2 & 2x+x^2 \\ 2x+x^2 & 1+2x^2 & 2x+x^2 \\ 2x+x^2 & 2x+x^2 & 1+2x^2 \end{pmatrix}$. On en déduit facilement par calculs que
$$M^2 - (2+x)M + (1+x-2x^2)I_3 = 0$$
2. En déduire pour quelles valeurs de x la matrice M est inversible. On a
$$M^2 - (2+x)M = (1+x-2x^2)I_3 \Longleftrightarrow M(M-(2+x)I_3) = (1+x-2x^2)I_3$$
Donc M est inversible si et seulement si $1+x-2x^2 \neq 0$, autrement dit si $\underline{x \neq 1 \text{ et } x \neq -\frac{1}{2}}$. Dans ce cas, on a
$$M\left(\frac{1}{1+x-2x^2}M - \frac{2+x}{1+x-2x^2}I_3\right) = I_3$$
et alors M est bien inversible, d'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{1+x-2x^2}M - \dfrac{2+x}{1+x-2x^2}I_3$.

32

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^k = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer sa matrice inverse.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^k = 0$.
   On a :
   $$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) = I_n - \underbrace{A^k}_{=0} = I_n$$
   Ainsi, la matrice $I_n - A$ est inversible à droite, donc inversible et son inverse est bien :
   $$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On essaie d'appliquer la question précédente: essayons d'écrire M sous la forme $I_n - B$ avec B une matrice nilpotente.
   On a $M = I_n - B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On a facilement $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^4 = 0$.
   Donc B est nilpotente d'ordre 4. D'après la question 1, on sait que $M = I - B$ est donc inversible d'inverse $I + B + B^2 + B^3$. Ainsi,
   $$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2x & 6x^2 \\ 0 & 1 & -2x & 6x^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

33

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices sont-elles inversibles ? Si oui déterminer leur inverse.

1. On applique par exemple la méthode de Gauss-Jordan sur les lignes pour savoir si A est inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

On peut déjà conclure que la matrice A est inversible puisqu'elle est équivalente à une matrice triangulaire n'ayant pas de zéro sur sa diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{-1}{6} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 2/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$$

On a donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. La matrice B n'est directement pas inversible car $C_3 = C_1 + C_2$.
3. Pour la matrice C, qui est de forme particulière, on a :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C + 2I$$

Donc $C(C - I) = 2I$, autrement dit $C\left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}I\right) = I$.
La matrice C est donc inversible d'inverse $C^{-1} = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}I$.

34

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $A^2 - A$ et en déduire que A est inversible et déterminer son inverse par une combinaison linéaire de A et de I.
3. Soit $D = P^{-1}AP$. Vérifier que D est une matrice diagonale.
4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer A^n.

1. On applique la méthode de Gauss-Jordan sur les lignes pour savoir si P est inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

On peut déjà conclure que la matrice P est inversible puisqu'elle est équivalente à une matrice triangulaire n'ayant pas de zéro sur sa diagonale.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 & -12 & 24 \\ 0 & 6 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{matrix}$$

On a donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.
$$A^2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

D'où $A^2 - A = 2I \iff A(A - I) = 2I \iff A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$.

La matrice A est donc inversible à droite, donc inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$.

3. Après calculs :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En particulier, D est bien une matrice diagonale.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons A^n.
   Puisque $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$, et alors

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

Or, puisque D est diagonale, on sait que $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$A^n = PD^nP^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} & 4(-1)^n - 2^{n+2} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n - 2^n & -2(-1)^n + 3.2^n \end{pmatrix}$$

Remarquons que les formules de A^n et D^n sont vraies pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (puisque A et D sont inversibles), on a donc:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} & 4(-1)^n - 2^{n+2} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n - 2^n & -2(-1)^n + 3.2^n \end{pmatrix}$$

35

Soit M la matrice d'ordre n contenant uniquement des 1, sauf des 0 sur la diagonale. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si J désigne la matrice d'ordre n qui contient uniquement des 1, on a donc :

$$M = J - I$$

Il est facile de voir que $J^2 = nJ$, donc :

$$M^2 = (J-I)^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)(M+I) + I = (n-2)M + (n-1)I$$

La matrice M est donc inversible car on a :

$$M\left(\frac{1}{n-1}M - \frac{n-2}{n-1}I\right) = I$$

et $M^{-1} = \dfrac{1}{n-1}M - \dfrac{n-2}{n-1}I$.

Puisque $M^2 \in Vect(M, I)$, il est alors facile de vérifier par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \alpha_k M + \beta_k I$$

avec α_k et β_k à déterminer.
En effet, on a $M^0 = 0.M + 1.I$, $M^1 = 1.M + 0.I$, $M^2 = (n-2)M + (n-1)I$.

Soit $k \geqslant 0$. Si $M^k = \alpha_k M + \beta_k I$, alors on a :

$$M^{k+1} = M.M^k = \alpha_k M^2 + \beta_k M = \alpha_k(n-2)M + \alpha_k(n-1)I + \beta_k M = \Big[(n-2)\alpha_k + \beta_k\Big]M + [(n-1)\alpha_k]I$$

On voit donc qu'on a donc encore $M^{k+1} = \alpha_{k+1}M + \beta_{k+1}I$, en posant :

$$\alpha_{k+1} = (n-2)\alpha_k + \beta_k \qquad \text{et} \qquad \beta_{k+1} = (n-1)\alpha_k$$

On a alors :

$$\alpha_{k+2} = (n-2)\alpha_{k+1} + (n-1)\alpha_k$$

La suite (α_k) est donc récurrente linéaire double, d'équation caractéristique $x^2 - (n-2)x - (n-1) = 0$, de solutions -1 et $n-1$:

$$\alpha_k = \lambda(n-1)^k + \mu(-1)^k$$

On trouve facilement que $\lambda = 1/n$ et $\mu = -1/n$, d'où :

$$\alpha_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$$

et alors :

$$M^k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}M + \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}I$$