

CONCOURS BLANC

Exercice 1 : Pour s'échauffer

- Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x + 1$. f est dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
f				

Ainsi, $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[$, $x \ln(x) \geq x - 1$.

- $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = [x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.
- On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$. u et v sont C^1 sur $[1; e]$ et on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$ ainsi :

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx = [\frac{x^3}{3} \ln(x)]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} [\frac{x^3}{3}]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$$
- (a) Soit i un entier naturel non nul. On pose pour tout $n \geq i$, $P(n) : "$ $\sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1} "$.

- Pour $n = i$ on a d'une part : $\sum_{j=i}^i \binom{j}{i} = \binom{i}{i} = 1$ et d'autre part $\binom{i+1}{i+1} = 1$ donc la propriété $P(i)$ est vraie.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à i . On suppose que $P(n)$ est vraie.

Montrons que $P(n+1)$ reste vraie ie $\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \binom{n+2}{i+1}$.

On a : $\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i} + \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{i+1} = \binom{n+2}{i+1}$ (d'après la formule de Pascal).

- Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \geq i$.

On a bien $\forall n \geq i : \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.

- (b) Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{0} \\ &= (1+1)^{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Trigonométrie

- Soit x un réel, avec les formules d'Euler on a :

- $\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{1}{4} \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
 $= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$
- $\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{-1}{4} \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
 $= \frac{-1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$

2. (a) Avec la question précédente on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) dx = \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

- (b) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)\cos^2(x)$. u et v sont C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{3} \times \cos^3(x)$. Alors avec une IPP on obtient :

$$I = \left[x \left(-\frac{1}{3} \cos^3(x) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} \cos^3(x) dx = 0 + \frac{2}{9}$$

3. (a) Soit $E = \sin(3x)\cos^3(x) + \cos(3x)\sin^3(x)$, d'après la question 1) :

$$E = \frac{1}{4} \sin(3x)(\cos(3x) + 3\cos(x)) + \frac{1}{4} \cos(3x)(-\sin(3x) + 3\sin(x)) \\ = \frac{3}{4} \sin(3x)\cos(x) + \frac{3}{4} \cos(3x)\sin(x) \\ = \frac{3}{4} (\sin(3x)\cos(x) + \cos(3x)\sin(x)) \\ = \frac{3}{4} \sin(3x + x) \\ = \frac{3}{4} \sin(4x)$$

- (b) D'après ce qui précède, il s'agit de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{3}{4} \sin(4x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin(4x) = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que} \\ 4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

En donnant à k les valeurs 0, 1, 2 et 3 on trouve les solutions sur $[0; 2\pi[$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{13\pi}{8} \right\}.$$

Problème 1 : Etude d'une fonction

Partie A

- f est C^2 sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions C^2 sur $]0; +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle.
- D'après la question 1), f est nécessairement C^0 sur $]0; +\infty[$. Etudions la continuité de f en 0^+ : on sait que $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue sur $]0; +\infty[$.
- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- (a) D'après la question 1), f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a :
$$f'(x) = \frac{1(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

(b) Au voisinage de 0 on a : $e^x - 1 - xe^x = x + \frac{x^2}{2} - x(1 + x) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ainsi $f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$
(c) $f'(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$ et $\frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{xe^x}{(e^x)^2} = \frac{x}{e^x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ ainsi par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Partie B

- On pose pour $x > 0$, $h(x) = e^x - 1 - xe^x$. On a $h'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$ et $f''(x) = \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 - (e^x - 1 - xe^x)2e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x(e^x - 1)[-x(e^x - 1) - 2(e^x - 1 - xe^x)]}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$ où $g(x) = xe^x + x + 2 - 2e^x$
- (a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables et on a $\forall x > 0, g'(x) = e^x + xe^x + 1 - 2e^x$. g' est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables et on a $\forall x > 0, g''(x) = xe^x > 0$
(b) g' est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0$ ainsi pour tout $x > 0, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ ainsi pour tout $x > 0, g(x) > 0$ donc $f''(x) > 0$.

3. Ainsi f' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Or on sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{-1}{2}$.
4. Ainsi pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; 1]$.

Partie C

1. (a) Soit $x \geq 0$, d'après l'étude réalisée dans la partie B à la question 3., $f'(0) \leq f'(x) \leq 0$ soit $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$ alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- (b) D'après l'étude de la fonction f réalisée dans la partie B à la question 4., f est bien à valeurs dans $]0; 1]$.
2. Pour $x > 0$, $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow \frac{x(2 - e^x)}{e^x - 1} = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ (ne convient pas) ou $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$.
 L'équation $f(x) = x$ admet bien une seule solution sur $]0; +\infty[$ et on a : $S = \{\ln(2)\}$
3. f est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall t \in]0; +\infty[, |f'(t)| \leq \frac{1}{2}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tous réels $x, y > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$
Remarque : On peut aussi fixer x et y des réels strictement positifs et appliquer le théorème du cours avec $a = x$ et $b = y$.
4. (a) La suite (u_n) est bien définie et pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ (une récurrence triviale le démontre). Soit n un entier naturel fixé. On peut appliquer le résultat obtenu à la question C3 en choisissant en particulier $y = \ln(2) > 0$ et $x = u_n > 0$, on a : $|f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$ or on sait que $f(\ln(2)) = \ln(2)$ d'après la question 2 et que $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition. On retrouve alors l'inégalité proposée.
- (b) Pour tout entier naturel n on pose $P(n) : "|u_n - \ln(2)| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \ln(2)|"$. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie.
- Pour $n = 0$, $\frac{1}{2^0} = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$ (il y a même égalité).
 - Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie également c'est-à-dire : $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |u_0 - \ln(2)|$. On sait d'après la question 4.a) et par hypothèse de récurrence que : $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n |u_0 - \ln(2)| = (\frac{1}{2})^{n+1} |u_0 - \ln(2)|$
 - Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
- (c) $(\frac{1}{2})^n |u_0 - \ln(2)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car $|\frac{1}{2}| < 1$ ainsi d'après le théorème de passage à la limite dans une inégalité, (u_n) est convergente de limite $\ln(2)$.

Problème 2 : Intégrale et fonction

Partie A

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 0$ donc la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est bien définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[1; +\infty[$. La fonction $Arctan$ est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Donc par composition la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Le domaine de définition de f est bien centré en 0 et la fonction f est paire par parité de la fonction carrée. En effet :
 Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = Arctan(\sqrt{(-x)^2 + 1}) = Arctan(\sqrt{x^2 + 1}) = f(x)$.
3. **Méthode 1 :** g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ par composition de fonctions strictement croissantes (la fonction carrée, une fonction affine, la fonction racine carrée et la fonction $Arctan$.)

Méthode 2 : g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables et on a : $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$

Conclusion : g admet le tableau de variations suivant :

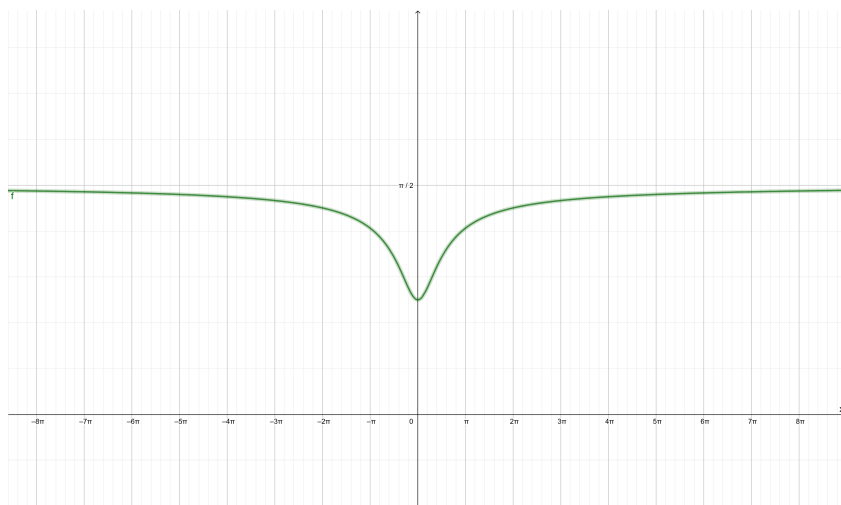
x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
g	1	$+\infty$

De plus, sur $]1; +\infty[$, $f = \text{Arctan}(g)$ donc par composition f est strictement croissante. $f(0) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. En posant $X = \sqrt{x^2+1}$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(X) = \frac{\pi}{2}$ par composition,

Par parité enfin, on obtient le tableau de variations suivant sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

4. Au point d'abscisse 0, la courbe de f admet une tangente horizontale car f admet un minimum à l'intérieur de l'intervalle $]0; +\infty[$. L'équation est donc $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = 0(x - 0) + f(0) = \frac{\pi}{4}$.



5.
6. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $1, 5 \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1, 5$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Partie B

1. On pose $h(x) = x \text{Arctan}(x) - \ln(\sqrt{x^2+1})$. La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 1 \times \text{Arctan}(x) + x \times \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \text{Arctan}(x) + \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = \text{Arctan}(x).$$

Nous avons bien montré que h est une primitive de Arctan .

2. On pose $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$. φ est C^1 sur $[\frac{1}{2}; 1]$ et on a $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ soit $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.
Pour $x = \frac{1}{2}$, $u = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ et pour $x = 1$, $u = \sqrt{2}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{\frac{5}{4}}}^{\sqrt{2}} \text{Arctan}(u) du &= [u \text{Arctan}(u) - \ln(\sqrt{u^2 + 1})]_{\sqrt{\frac{5}{4}}}^{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2} \text{Arctan}(\sqrt{2}) - \ln \sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{4}} \text{Arctan}(\sqrt{\frac{5}{4}}) + \ln(\sqrt{\frac{5}{4} + 1}) \\
&= \sqrt{2} \text{Arctan}(\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{5}{4}} \text{Arctan}(\sqrt{\frac{5}{4}}) + \ln(\frac{\sqrt{3}}{2})
\end{aligned}$$