

1 Résolution de systèmes linéaires

1 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ admet-il dans \mathbb{R}^2 aucune solution ? une unique solution ? une infinité de solutions ?

2 Résoudre dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z + t = 11 \\ 2x + y + z + t = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14 \\ x - 2z = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases}$$

3 Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en fonction du paramètre réel m , les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} (1 + m^2)x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ mz = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 6y - 4z = 2 \\ -3x - 9y + 6z = m - 5 \end{cases}$$

4 Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

5 Résoudre le système suivant dans \mathbb{R}^3 , en fonction des paramètres λ et μ :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = \lambda \\ -x + 2y + z = \mu \end{cases}$$

6 Montrer que l'application $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{matrix}$ est surjective.

7 Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{matrix}, \quad g : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{matrix}$$

2 Sous-espaces vectoriels dans \mathbb{R}^n

8 Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur $(-6, -17, 17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2, 1, 3), (3, 5, -2))$?

9 Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ou non :

1. $E_1 = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / e^x e^y = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z(x^2 + y^2) = 0\}$
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\}$.

10 Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

11 Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

1. $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4. $D = \{(a + 2b, a - b, 3b, 2a), a, b \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x\}$

12 Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver deux familles génératrices différentes :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$
2. $F = \{(-2y + z, y - z, y) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

13 Vérifier que chacun des espaces vectoriels suivants est un plan de \mathbb{R}^3 et en donner une équation cartésienne.

1. $A = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 2, 0))$
2. $B = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 3, 0))$
3. $C = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, -1))$
4. $D = \text{Vect}((1, -1, 1), (2, 1, 1), (0, -3, 1))$

14 Écrire chacun des sous-espaces de \mathbb{R}^4 suivants sous les trois formes d'écriture : soit par un système d'équations cartésiennes (comme A), soit par un paramétrage (comme B), soit par une famille génératrice (comme C) :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
2. $B = \{(a - b + 3c, c, a - b, 0), a, b, c \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1))$

15 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u_1 = (1, -1, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -5, 3)$.

Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

16 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u_1 = (-1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, 2, 4)$, $v_1 = (3, -1, a)$ et $v_2 = (2, 3, b)$.

Déterminer a et b dans \mathbb{R} tels que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

17 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u = (1, 3, 1)$, $v = (2, 1, 2)$ et $w = (m, m + 1, 3m + 2)$, où $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que $w \in \text{Vect}(u, v)$.

18 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((1, 2), (3, 3))$ dans \mathbb{R}^2 .
2. $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
3. $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$ dans \mathbb{R}^3 .
4. $((2, -1, 1), (1, -1, 3), (-3, 1, 1), (1, 2, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
5. $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ dans \mathbb{R}^4 .

19 Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{(x - y + z, 3x + 6z, -2x + 4y), x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

20 Déterminer si la famille donnée est une famille libre / famille génératrice / base de l'espace donné :

1. $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$ dans \mathbb{R}^4
2. $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ dans \mathbb{R}^3
3. $((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 0, -2))$ dans \mathbb{R}^4 .
4. $((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$ dans \mathbb{R}^3 .
5. $((1, 2, 3), (-1, 2, 5), (-1, 10, 21))$ dans \mathbb{R}^3 .
6. $((1, 2), (2, 1), (-1, 4))$ dans \mathbb{R}^2

21

1. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est libre, et la compléter une base de E .
 - (a) Dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1))$
 - (b) Dans \mathbb{R}^4 , $\mathcal{F} = ((1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$
2. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est génératrice, et en extraire une base de E .
 - (a) Dans \mathbb{R}^2 , $\mathcal{F} = ((2, 3), (1, -1), (1, 2))$
 - (b) Dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 2), (1, 3, -4))$

22 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (m^2, 2m, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. La famille (u, v) est-elle libre ? génératrice de \mathbb{R}^3 ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que (u, v, w) soit une base de \mathbb{R}^3 .

23 Dans \mathbb{R}^3 , on donne : $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3))$.

Montrer que $F = G$.

24 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$.

Vérifier la formule de Grassmann.

25 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((2, 1, 0))$.

Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

26 Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 1, 0))$.

Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

27 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

Soit $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

28 Soit $F = \text{Vect}((-1, 2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = -2z + t\}$. Déterminer une base et la dimension de F , de G et $F \cap G$.

29 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$.

Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $F \oplus \text{Vect}(x) = E$.

30 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((1, 2, 2))$.

Trouver deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^3 tels que $F \oplus \text{Vect}(x, y) = E$.

31 Montrer que si (u, v, w) est une famille libre dans \mathbb{R}^n , il en est de même pour la famille $(u + v, v + w, w + u)$.

32 Soit $n \geq 1$ et soit (u_1, \dots, u_n) une base de \mathbb{R}^n . On note pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i = \sum_{k=1}^i u_k$.

1. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer u_j comme combinaison linéaire des y_i .
2. Montrer que (y_1, y_2, \dots, y_n) est une base de \mathbb{R}^n .
3. On suppose $n \geq 3$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u_1 + u_2 - u_3$ dans la base (y_1, y_2, \dots, y_n) ?

33 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

34 Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n tels que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$ et $A \subset C$.

Montrer que $C = A \oplus (B \cap C)$.