1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

La fonction ln est continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue et dérivable sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
Donc par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ est continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x$ étant également continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ et ne s'annulant pas, on en déduit que par quotient f est bien continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

$$\forall x \geqslant \sqrt{e},\ f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = \sqrt{\ln(x)} = \sqrt{w(x)}$ et $u'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$. Donc

$$\forall x > \sqrt{e},\ f'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{\ln(x)}} - \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^2} = \frac{1 - 2\ln(x)}{2x^2\sqrt{\ln(x)}} < 0$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

Continue et strictement décroissante, f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ f(\sqrt{e})]$.
On a $f(\sqrt{e}) = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}} = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.
On a $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x} = \dfrac{(\ln(x))^{1/2}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
On a donc f qui réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]0, \dfrac{1}{\sqrt{2e}}]$.

2 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.
Montrer que si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$$

La fonction f et la fonction $x \mapsto -x$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(-x)$ est également dérivable. On a donc en dérivant la relation précédente (dérivée d'une composée dans le membre de gauche),

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x)$$

La fonction f' est donc une fonction impaire.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$$

Les fonctions $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto -f(x)$ sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$ par composition. De plus en dérivant la relation précédente (dérivée d'une composée à gauche), on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x) \Longrightarrow f'(-x) = f'(x)$$

La fonction f' est donc une fonction paire.

3 Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1.$
2. $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}.$
5. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad 2\sin(x)+\tan(x) \geqslant 3x$

1. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x - x - 1$.
   La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = e^x - 1$.
   On en déduit que φ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.
   Or, $\varphi(0) = 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant 0$.
2. On note pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f(x) = \ln(1+x) - x$.
   La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x > -1,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
   On en déduit que f est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$.
   Or, $f(0) = 0$, donc : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) \leqslant 0$, donc : $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x}$.
   Remarquons alors qu'en particulier :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln\left(1-\frac{x}{x+1}\right) \leqslant -\frac{x}{x+1} \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) \leqslant -\frac{x}{x+1} \Longrightarrow \frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$$
3. Remarquons que l'inégalité est triviale si $|x| \geqslant 1$. Montrons donc qu'elle est vraie sur $[-1,1]$. Posons pour tout $x \in [-1,1], g(x) = |\sin(x)| - |x|$ et remarquons que g est paire, donc étudions g uniquement sur $[0,1]$.
   On a $\forall x \in [0,1], g(x) = \sin(x) - x$. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et on a $\forall x \in [0,1]$:
   $g'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$.
   La fonction g est donc décroissante sur $[0,1]$. Or, $g(0) = 0$, donc g est négative sur $[0,1]$.
   On a donc $\forall x \in [0,1],\ \sin(x) \leqslant x$, soit $|\sin(x)| \leqslant |x|$ et par parité c'est vrai aussi sur $[-1,0]$. Finalement :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$$
   (et en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sin(x) \leqslant x$)
4. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. La fonction h est paire, étudions-la uniquement sur $\mathbb{R}^+$.
   La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, h'(x) = -\sin(x) + x$. Or, on a démontré (question précédente) que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leqslant x$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h'(x) \geqslant 0$. La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $h(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant 0$.
   Par parité, c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}^-$, donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$
5. Notons pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$. La fonction φ est dérivable sur $[0,\pi/2[$ et :
   $$\forall x \in [0,\pi/2[,\ \varphi'(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 3 = \frac{2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)} = \frac{(\cos(x)-1)^2(2\cos(x)+1)}{\cos^2(x)} \geqslant 0$$
   Ainsi, φ est croissante sur $[0,\pi/2[$, avec $\varphi(0) = 0$, donc : $\forall x \in [0,\pi/2[, \varphi(x) \geqslant 0$.

4 Montrer que pour $u > 0$ et $v \in \mathbb{R}$: $uv \leqslant u\ln(u) + e^{v-1}$.

Fixons $u > 0$ quelconque.

Et notons alors pour tout $v \in \mathbb{R}$: $\forall v \in \mathbb{R},\ f(v) = uv - u\ln(u) - e^{v-1}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall v \in \mathbb{R},\ f'(v) = u - e^{v-1}$.

$$u - e^{v-1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow e^{v-1} \leqslant u \Longleftrightarrow v \leqslant \ln(u) + 1$$

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty, \ln(u)+1]$ et décroissante sur $[\ln(u)+1, +\infty[$, elle admet donc un maximum en $\ln(u)+1$. Or :

$$f(\ln(u)+1) = u(\ln(u)+1) - u\ln(u) - e^{\ln(u)+1-1} = u\ln(u) + u - u\ln(u) - u = 0$$

Ainsi, on a bien que : $\forall v \in \mathbb{R}, f(v) \leqslant 0$, autrement dit :

$$\forall v \in \mathbb{R},\ uv \leqslant u\ln(u) + e^{v-1}$$

Ceci étant vrai pour tout $u > 0$, on a donc bien montré que :

$$\forall u > 0,\ \forall v \in \mathbb{R},\ uv \leqslant u\ln(u) + e^{v-1}$$

5 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme somme de composées de fonctions dérivables), et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, la fonction f est constante sur chacun des intervalles sur lequel elle est dérivable.

De plus, $f(1) = 2\text{Arctan}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\pi}{2}$$

et $f(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\pi/2$, donc :

$$\forall x < 0,\ f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

6 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 2\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\text{Arctan}(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et est dérivable par somme de composées de fonctions dérivables. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= 2 \times \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2} \\
&= 2 \times \frac{\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{1+(x^2+1)-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}+\frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{2(x-\sqrt{x^2+1})}{2\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)\right)}+\frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{-1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0
\end{aligned}$$

Ainsi, f est constante sur chaque intervalle où elle est dérivable, donc constante sur $\mathbb{R}$.
En particulier, $f(0) = 2\text{Arctan}(1) = 2 \times \pi/4 = \pi/2$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\text{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$$

7 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

- Sur $\mathbb{R}^*$.
  La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  La fonction $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
  On a alors
  $$\forall x \neq 0,\ f(x) = e^{-1/x^2} = e^{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = -\frac{1}{x^2}$$
  On a donc
  $$\forall x \neq 0,\ f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \boxed{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}$$

- En 0. On remarque que f est bien continue en 0.
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{1}{x}e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$
  $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{u\to+\infty} ue^{-u^2} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\sqrt{u^2}}{e^{u^2}} = 0$ par croissances comparées, donc par composition de limites, on a :
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$
  $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, et $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{-u^2} = \lim\limits_{u\to+\infty} -\frac{\sqrt{u^2}}{e^{u^2}} = 0$ par croissances comparées, donc par composition de limites, on a :
  $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$
  Au final, on a montré que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, donc la fonction f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

On a donc au final, f dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{8}$ On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2+3\ln(x)}{1-\ln(x)}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]e,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

1. La fonction f est dérivable donc continue sur $]e,+\infty[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $]e,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant jamais sur $]e,+\infty[$). On a

$$\forall x \in]e,+\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{3}{x}(1-\ln(x)) - (2+3\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \frac{5}{x(1-\ln(x))^2} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]e,+\infty[$.

- La fonction f est continue sur $]e,+\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]e,+\infty[$.

Donc, f réalise une bijection de $]e,+\infty[$ dans $f(]e,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to e^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

$$f(x) = \frac{2+3\ln(x)}{1-\ln(x)} \underset{x\to e}{\sim} \frac{5}{1-\ln(x)} \underset{x\to e^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$f(x) = \frac{2+3\ln(x)}{1-\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3\ln(x)}{-\ln(x)} = -3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -3$$

En conclusion, f réalise une bijection de $]e,+\infty[$ dans $]-\infty,-3[$.

2. On cherche $\alpha = f^{-1}(-4)$, autrement dit, on cherche $\alpha \in]e,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = -4$.

$$f(\alpha) = -4 \iff \frac{2+3\ln(\alpha)}{1-\ln(\alpha)} = -4 \iff 2+3\ln(\alpha) = -4+4\ln(\alpha) \iff \ln(\alpha) = 6 \iff \alpha = e^6$$

On a donc

$$f(e^6) = -4 \iff f^{-1}(-4) = e^6$$

On sait que pour tout $x \in]e,+\infty[$,

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable en } f(x) \iff f'(x) \neq 0}$$

Donc pour savoir si f^{-1} est dérivable en $-4 = f(e^6)$, il suffit de vérifier que $f'(e^6) \neq 0$.

$$f'(e^6) = \frac{5}{e^6(1-\ln(e^6))^2} = \frac{5}{e^6 25} = \frac{1}{5e^6} \neq 0$$

La fonction f^{-1} est donc bien dérivable en -4 et

$$(f^{-1})'(-4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-4))} = \frac{1}{f'(e^6)} = 5e^6$$

9 Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| - x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

1. Remarquons que pour tout $x \in]0,1[$, $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \dfrac{1-x}{x}$, donc :

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \ln(1-x) - \ln(x) - x$$

La fonction f est dérivable donc continue sur $]0,1[$ (somme de composées de fonctions dérivables), et on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x} - 1 = \frac{-x-(1-x)-x(1-x)}{(1-x)x} = \frac{-1-x+x^2}{(1-x)x} < 0$$

En effet, $x^2 - x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5$, donc a deux racines $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, donc pour tout $x \in [0,1], x^2 - x - 1 < 0$ (car 0 et 1 sont entre les deux racines).
La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ vers $f(]0,1[) = \left]\lim\limits_{1} f, \lim\limits_{0} f\right[=]-\infty, +\infty[$.

2. :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) - x = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = x - \frac{1}{2}$$

Remarquons que $x = 1/2$ convient ! on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc

$$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Comme on a montré que f est dérivable en tout réel x de $]0,1[$, avec $\forall t \in]0,1[, f'(t) \neq 0$, alors f^{-1} est bien dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et on a en particulier :

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}{-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{5}$$

10 La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant pas), et est même continue en 0 puisque c'est un quotient de fonctions continues en 0, le dénominateur ne s'annulant pas au voisinage de 0.
On a :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0,\ f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

La fonction f' étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

11 En reconnaissant des taux d'accroissements, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{2x}$

1. Notons $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$. Alors $f(0) = 1$, et la fonction f est dérivable en 0. On a donc :
$$\frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$$
Or, pour tout x au voisinage de 0, $f'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$, donc $f'(0) = 0$, et donc :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x} = 0}$$

2. Remarquons que : $\displaystyle\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, donc par passage à l'inverse :
$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1}$$

3. Remarquons que : $\displaystyle\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1$, donc :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

4. Notons $g(x) = \ln(\cos(x))$. Alors g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$.
Donc : $\displaystyle\frac{\ln(\cos(x))}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} g'(0)$.
Or, pour x au voisinage de 0, $g'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$, donc $g'(0) = 0$ et
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = 0}$$

5. Notons $h(x) = e^{-x}$. On a $h(0) = 1$, et $\displaystyle\frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} h'(0)$.
Or, pour tout x, $h'(x) = -e^{-x}$ et donc $h'(0) = -1$, donc :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1}$$

6. Remarquons que : $\displaystyle\frac{\text{Arctan}(x)}{2x} = \frac{1}{2}\frac{\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\text{Arctan}'(0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{2} \times 1$:
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{2x} = \frac{1}{2}}$$

12

Calculer les limites des expressions suivantes aux valeurs indiquées.

1. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0
2. $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0
3. $\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ en 2
4. $\dfrac{\ln(2+x)-\ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x})-e}$ en 0
5. $\dfrac{x-1}{x^n-1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$)
6. $\dfrac{\ln(4x^2-2x+1)}{x}$ en 0 et $+\infty$
7. $\dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$ en 1^+
8. $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
9. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1}$ en 0
10. $\dfrac{\ln(2-x^2)}{x-1}$ en 1
11. $(1+x^2)^{\ln(x)/x}$ en 0^+
12. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$
13. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/2}$ en $+\infty$ et $-\infty$
14. $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2}$ en $+\infty$
15. $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$ en 1^+ et $+\infty$
16. $\dfrac{\ln(x+1)}{e^x-\sqrt{1+x}}$ en 0

Avec les taux d'accroissements, on peut en déduire des limites particulières et surtout des équivalents simples :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

$$\boxed{\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1}$$

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \boxed{e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \alpha \qquad \boxed{(1+x)^\alpha-1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

1. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0

   Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on peut dire que $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, donc $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = \boxed{x}$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0}$.

2. $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0

   On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x}{1-x} = 1$. Or, on sait que $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, donc on peut dire que

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1+x}{1-x} - 1 = \frac{(1+x)-(1-x)}{1-x} = \frac{2x}{1-x}$$

   On en déduit que

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\frac{2x}{1-x} = \frac{2}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{2}$$

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2}$.

Remarque : on peut aussi écrire $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)$ et après utiliser l'équivalent $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ pour avoir l'équivalent : $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x}{1-x}$.

3. $\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ en 2

Puisque $x-1 \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 1$, on sait que $\ln(x-1) \underset{x\to 2}{\sim} (x-1)-1$, donc

$$\frac{\ln(x-1)}{x-2} \underset{x\to 2}{\sim} \frac{(x-1)-1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = \boxed{1}$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = 1}$.

4. $\dfrac{\ln(2+x)-\ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x})-e}$ en 0

Regardons séparément le numérateur et le dénominateur.

$$\begin{aligned}\ln(2+x)-\ln(2) &= \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)-\ln(2) = \ln(2)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln(2)\\ &= \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} \quad (\text{car } \lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0)\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\exp\left(\sqrt{1+x}\right)-e &= e\left(e^{\sqrt{1+x}-1}-1\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} e\left(\sqrt{1+x}-1\right) \quad (\text{ car } \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)=0)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} e\frac{1}{2}x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{ex}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, par quotient, on obtient :

$$\frac{\ln(2+x)-\ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x})-e} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{ex}{2}} = \frac{x}{2}\times\frac{2}{ex} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2+x)-\ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x})-e} = \dfrac{1}{e}}$.

5. $\dfrac{x-1}{x^n-1}$ en 1 ($n\in\mathbb{N}^*$)

Soit $n\geqslant 1$. Posons $x=1+h$ avec $h\in\mathbb{R}$. Alors, on a $x\longrightarrow 1 \Longleftrightarrow h\longrightarrow 0$.

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{(1+h)-1}{(1+h)^n-1} = \frac{h}{(1+h)^n-1} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{nh} = \boxed{\frac{1}{n}}$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1} = \dfrac{1}{n}}$.

Remarque : rappelons-nous que

$$x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x^2+x+1)$$

donc on peut aussi calculer la limite directement :

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$$

On peut aussi utiliser l'inverse d'un taux d'accroissement en 1.

6. $\dfrac{\ln(4x^2-2x+1)}{x}$ en 0

Pour le numérateur, on reconnaît une forme $\ln(1+u)$ avec $u \to 0$, donc on peut appliquer $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:

$$\frac{\ln(4x^2-2x+1)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4x^2-2x}{x} = 4x-2$$

On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(4x^2-2x+1)}{x} = -2}$.

$\dfrac{\ln(4x^2-2x+1)}{x}$ en $+\infty$

On a $4x^2-2x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 4x^2$ (polynôme). Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2) = +\infty \neq 1$, on peut bien composer par le logarithme.

$$\frac{\ln(4x^2-2x+1)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(4x^2)}{x} = \frac{\ln(4)+2\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(x)}{x}$$

On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(4x^2-2x+1)}{x} = 0}$

7. $\dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$ en 1^+

$$\begin{aligned}
\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} &= \frac{e^{x\ln(x)}-1}{\ln(1+(-\sqrt{x^2-1}))} \\
&\underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{x\ln(x)}{-\sqrt{x^2-1}} \quad \text{car } e^u-1 \underset{u\to 0}{\sim} u \text{ et } \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u \\
&\underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}} \\
&\underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{-(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \\
&\underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{-(x-1)}{\sqrt{2(x-1)}} \\
&\underset{x\to 1^+}{\sim} \boxed{\frac{-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} = 0}$.

8.

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1}$$

9.
$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Donc
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1} = \frac{1}{2}}$$

10.
$$\frac{\ln(2-x^2)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{(2-x^2)-1}{x-1} = \frac{1-x^2}{x-1} = \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = -1-x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -2$$

Donc
$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x^2)}{x-1} = -2}$$

11.
$$(1+x^2)^{\ln(x)/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\ln(1+x^2)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle
$$\frac{\ln(x)}{x}\ln(1+x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} \times x^2 = x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Donc, par composition des limites,
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\ln(1+x^2)\right) = e^0 = 1}$$

12.
$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle
$$x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right) = x\left(\frac{x+1-(x-1)}{x-1}\right) = x\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{2x}{x-1} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

Donc, par composition des limites,
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = e^2}$$

13.
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2/2} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle
$$\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to \pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{2} \begin{cases} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$$

Donc, par composition des limites,
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \exp\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty}$$

et
$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} \exp\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = 0}$$

14.
$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2} = \exp\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle

$$\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{x^2-1-(x^2+1)}{x^2+1}\right) = \frac{x}{2}\frac{-2}{(x^2+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) = e^0 = 1}$$

15.
$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right)$$

<u>En $+\infty$.</u>
Regardons ce qui est dans l'exponentielle.
On sait que $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, donc $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\begin{aligned}
x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right) &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}-1\right)\\
&= x\ln(x)\frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\ln(x)}\\
&= x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\\
&= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

Donc par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right) = e^1 = e}$$

<u>En 1^+.</u>
Regardons ce qui est dans l'exponentielle.

$$x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right) \underset{x\to1^+}{\sim} \ln(x)\left(\ln(\ln(x+1))-\ln(\ln(x))\right) = \ln(x)\ln(\ln(x+1)) - \ln(x)\ln(\ln(x))$$

Or $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)\ln(\ln(x+1)) = 0$ (car du type $0\times\ln(2)$).
De plus, $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$ (car du type $u\ln(u)$ avec $u\to0$).
Ainsi

$$x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0$$

Donc par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to1^+}\exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right) = e^0 = 1}$$

16. Le numérateur est $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Le dénominateur est
$$e^x - \sqrt{1+x} = (e^x - 1) - \left(\sqrt{1+x} - 1\right)$$

On sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et d'autre part $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$,

Puisque les deux expressions sont du même ordre de grandeur (toutes deux du type αx et βx) avec $\alpha + \beta \neq 0$, on est dans le cas où on peut sommer les équivalents :

$$e^x - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

Ainsi, par quotient,
$$\frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{1}{2}x} = 2$$

On en déduit que
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}} = 2}$$

ATTENTION : dans le cas général, on n'a pas le droit de sommer les équivalents. Si vous n'êtes pas sûr de votre coup, redémontrer au lieu de sommer :

On a $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$,

Si on a l'intuition que la différence des deux devrait être $\dfrac{1}{2}x$, montrons-le correctement.

$$\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\frac{1}{2}x} = 2\frac{(e^x - 1) - \left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x} = 2\frac{(e^x - 1)}{x} - 2\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Or, $2\dfrac{(e^x-1)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x}{x} = 2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 2$.

Et, $2\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2\frac{1}{2}x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

Donc par sommation des limites (ce qu'on a toujours le droit de faire), on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\frac{1}{2}x} = 2 - 1 = 1$$

Donc on a bien $e^x - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$.

13 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{y} \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $x < y$. La fonction ln est continue sur $[x, x+y]$ et dérivable sur $]x, x+y[$. On aimerait appliquer l'IAF à ln sur $[x, x+y]$. Essayons de borner la dérivée de ln.

$$\forall t \in]x, x+y[,\ \ln'(t) = \frac{1}{t}$$

La fonction $\ln'$ est décroissante sur $]x, x+y[$. Ainsi

$$\forall t \in]x, x+y[, \frac{1}{x+y} \leqslant \ln'(t) \leqslant \frac{1}{x}$$

Donc l'IAF nous donne directement que

$$\frac{y}{x+y} \leqslant \ln(x+y) - \ln(x) \leqslant \frac{y}{x}$$

soit

$$\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{y} \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$$

Remarque: on peut aussi appliquer le résultat obtenu dans la question 2 de l'exercice 3 à $\frac{y}{x}$.

14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|1-\cos(x)| \leqslant |x|$.

La fonction cos est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\cos'(t)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)| \leqslant 1$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\cos(y)-\cos(x)| \leqslant 1 \times |x-y|$$

En particulier, pour $y=0$, puisque $\cos(y)=1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |1-\cos(x)| \leqslant |x|$$

15 Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $|\tan(x)| \geqslant |x|$.

La fonction tan est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé.
En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et x, on a :

$$\exists c \in]0, x[\quad (\text{ou}]x, 0[) \quad / \quad \tan(x) - \tan(0) = \tan'(c)(x - 0)$$

autrement dit :

$$\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ / \ \tan(x) = (1 + \tan^2(c))x$$

Donc :

$$|\tan(x)| = (1 + \tan^2(c))|x| \geqslant |x|$$

16 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$
3. Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

1. La fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]1, +\infty[$. La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. Par composition, on en déduit donc que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
2. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = x$, i.e. tel que $h(x) - x = 0$.
   Posons $f : x \mapsto h(x) - x$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = h'(x) - 1 = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} - 1 = \frac{-e^{-x} - (1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} = \frac{-1 - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} < 0$$
   La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$.
   Puisque $0 \in]-\infty, +\infty[$, on sait donc que 0 admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$, qu'on peut noter α.
   On a donc montré qu'il existait un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(\alpha) = 0$, i.e. $h(\alpha) = \alpha$.

   De plus, on a $f(0) = \ln(2) > 0$ et $f(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) - 1 < 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$. Par unicité de α, on en déduit que $\alpha \in [0, 1]$.
3. L'inégalité fait penser à l'Inégalité des Accroissements Finis. Essayons de l'appliquer.
   La fonction h est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\dfrac{1}{e^x + 1}$. Essayons de trouver des bornes pour la fonction h'.
   La fonction h' est encore dérivable sur $[0, +\infty[$ (inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas), et on a :
   $$\forall x \geqslant 0,\ h''(x) = -\frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$
   La fonction h' est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$
   Puisque $h'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$, on a donc $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant h'(x) \leqslant 0$, ou autrement dit
   $$\forall x \in [0, +\infty[,\ \left|h'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}$$
   On a donc :
   - h continue et dérivable sur $[0, +\infty[$
   - $\forall t \geqslant 0,\ |h'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

   Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [0, +\infty[$, on a :
   $$|h(x) - h(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$
   En particulier, pour $y = \alpha \in [0, 1]$, qui vérifie $h(\alpha) = \alpha$, on a :
   $$|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

17

1. Montrer que l'équation $e^x = 3+2x$, d'inconnue $x \in]-\infty, 0]$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 0]$, puis justifier que $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \ \left| \frac{e^x - 3}{2} - \alpha \right| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

1. Notons pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = e^x - 3 - 2x$.
   La fonction f est continue et dérivable sur $]-\infty, 0]$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 2 < 0$.
   La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, elle réalise alors une bijection de $]-\infty, 0]$ vers $[f(0), \lim\limits_{-\infty} f[= [-2, +\infty[$. Comme $0 \in [-2, +\infty[$, l'éuqation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 0]$.

   Remarquons que $f(-2) = e^{-2} - 3 + 4 = e^{-2} + 1 > 0$ et $f(-1) = e^{-1} - 3 + 2 = e^{-1} - 1 < 0$. On a donc :

   $$f(-2) > f(\alpha) > f(-1)$$

   donc par stricte décroissance de f sur $]-\infty, 0]$ (avec $-1 \in]-\infty, 0]$, $-2 \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]-\infty, 0]$),

   $$-2 < \alpha < -1$$

2. Notons pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $g(x) = \frac{e^x - 3}{2}$.
   La fonction g est continue et dérivable sur $]-\infty, 0]$ et :

   $$\forall t \in]-\infty, 0], \ |g'(t)| = \left| \frac{1}{2} e^t \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

   D'après l'inégalité des accroissements finis :

   $$\forall x, y \in]-\infty, 0], \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$

   En particulier, pour $y = \alpha$, qui vérifie $e^\alpha = 3 + 2\alpha \iff \frac{e^\alpha - 3}{2} = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha$, on a :

   $$\forall x \in]-\infty, 0], \quad |g(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

$\boxed{\mathbf{18}}$ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.
Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

La fonction f est continue (car dérivable) sur le segment $[a, b]$, donc est bornée et atteint ses bornes sur le segment $[a, b]$. En particulier, elle admet un maximum en un réel $c \in [a, b]$:

$$\exists c \in [a, b] \;/\; \forall t \in [a, b],\; f(t) \leqslant f(c)$$

Déjà on ne peut pas avoir $c = a$, puisque $f(a) < f(b)$.
De plus, puisque $f'(b) < 0$, $f(b)$ ne peut pas être un maximum, car si f admet un maximum en b, on a nécessairement $f'_g(b) \geqslant 0$.
Ainsi, le maximum de f est atteint en $c \in]a, b[$, on sait alors que $f'(c) = 0$.

19 Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si f est constante, alors il existe bien $c \in]a, +\infty[$ (n'importe lequel) tel que $f'(c) = 0$.
Sinon, il existe $b \in]a, +\infty[$ tel que $f(a) \neq f(b)$.

Posons $y = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ qui est une valeur intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$: par TVI il existe $x_1 \in [a, b[$ tel que $y = f(x_1)$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, y est aussi une valeur intermédiaire à $f(b)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, donc par TVI, il existe $x_2 \in]b, +\infty[$ tel que $y = f(x_2)$.
On applique le Théorème de Rolle à f sur $[x_1, x_2]$ (car continue et dérivable sur $[x_1, x_2]$ et $f(x_1) = f(x_2)$), donc il existe bien $c \in]x_1, x_2[\subset]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

20 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $e^{-a} f(a) = e^{-b} f(b)$. Montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $e^{-a} f(a) = e^{-b} f(b)$.

Posons pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) = e^{-x} f(x)$.
Par produit, la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
De plus, on sait que $\varphi(a) = \varphi(b)$ par hypothèse.
Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, pour tout $x \in]a, b[$, $\varphi'(c) = (-e^{-x}) f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x))$.
Comme $\varphi'(c) = 0$, on a donc $f'(c) - f(c) = 0$, donc $f(c) = f'(c)$.

21 Soit f une fonction définie et deux-fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f''(x) - f(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$.
Indication : on pourra commencer par étudier $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$.

Notons comme l'indication le suggère :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; g(x) = e^x(f'(x) - f(x))$$

La fonction g est dérivable car f et f' le sont, et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; g'(x) = e^x(f'(x) - f(x)) + e^x \left(f''(x) - f'(x)\right) = e^x \left(f''(x) - f(x)\right) \geqslant 0$$

Ainsi, g est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g(0) = 0$, la fonction g est donc positive, et en particulier, on a :

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) - f(x) \geqslant 0}$$

Suivant la même méthode, posons à présent :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; h(x) = e^{-x} f(x)$$

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; h'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} \left(f'(x) - f(x)\right) \geqslant 0$$

La fonction h est donc croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $h(0) = 0$, la fonction h est donc positive, et en particulier, on a :

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \; f(x) \geqslant 0}$$