1 Calculs de dérivées, étude de fonctions

1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

2 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.
Montrer que si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

3 Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x + 1$.
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
5. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad 2\sin(x) + \tan(x) \geqslant 3x$

4 Montrer que pour $u > 0$ et $v \in \mathbb{R}$: $uv \leqslant u\ln(u) + e^{v-1}$.

5 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

6 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \mathrm{Arctan}(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

7 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2 + 3\ln(x)}{1 - \ln(x)}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

9 Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| - x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

10 La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

11 En reconnaissant des taux d'accroissements, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{2x}$

2 Équivalents usuels en 0

12 Calculer les limites des expressions suivantes aux valeurs indiquées.

1. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0
2. $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0
3. $\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ en 2
4. $\dfrac{\ln(2+x)-\ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x})-e}$ en 0
5. $\dfrac{x-1}{x^n-1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$)
6. $\dfrac{\ln(4x^2-2x+1)}{x}$ en 0 et $+\infty$
7. $\dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$ en 1^+
8. $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
9. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1}$ en 0
10. $\dfrac{\ln(2-x^2)}{x-1}$ en 1
11. $(1+x^2)^{\ln(x)/x}$ en 0^+
12. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$
13. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/2}$ en $+\infty$ et $-\infty$
14. $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2}$ en $+\infty$
15. $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$ en 1^+ et $+\infty$
16. $\dfrac{\ln(x+1)}{e^x-\sqrt{1+x}}$ en 0

3 Utilisation des Accroissements Finis

13 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{y}\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|1-\cos(x)| \leqslant |x|$.

15 Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $|\tan(x)| \geqslant |x|$.

16 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1+e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0,1]$
3. Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad |h(x)-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

17 1. Montrer que l'équation $e^x = 3+2x$, d'inconnue $x \in]-\infty, 0]$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 0]$, puis justifier que $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\left|\dfrac{e^x-3}{2}-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

4 Exercices plus théoriques

18 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$. Montrer que f' s'annule sur $]a,b[$.

19 Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

20 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$. Montrer qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

21 Soit f une fonction deux-fois dérivable sur $[0,+\infty[$ telle que : $\forall x \geqslant 0, \quad f''(x) - f(x) \geqslant 0$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Étudier $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$.