1 Calculs de limites

1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{|x+2|}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-2\cos(x))$.
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

2 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-e^x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x}\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x\ln(x^2+x)$.
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^{1/x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\ln(x)}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{1/x}$.

3 Étudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$.
4. $x \mapsto \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.
5. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$.
6. $x \mapsto x\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$.
7. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
8. $x \mapsto x^x$.
9. $x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)$.

4 Étudier la définition, la continuité, et le prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$
3. $x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$

2 Continuité sur un intervalle

5 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[0,1]$ (i.e. qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$).

6 Montrer que l'équation $\ln(x) = -x$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+7}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.
4. Montrer que l'équation $f(x) = -\ln(x)$ admet une unique solution.

8 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et décroissante.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution. .

9 Soit f une fonction continue sur $[1,2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Montrer qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que : $\forall x \in [1,2],\ k_1 x \leqslant f(x) \leqslant k_2 x$.

10 Soit f une fonction croissante et majorée sur $[1,+\infty[$.
On suppose que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est croissante sur $]1,+\infty[$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
2. En déduire le signe de φ sur $]1,+\infty[$.
3. Montrer finalement que f est constante sur $[1,+\infty[$.

11 Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x+1)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

1. Justifier que f admet une limite en $+\infty$ et préciser sa valeur.
2. Montrer que pour tout $x > 0$: $\dfrac{f(x+1)+f(x)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{f(x)+f(x-1)}{2}$.
3. En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

12 Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I. On définit les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Big(\sup(f,g)\Big)(x) = \max(f(x),g(x)), \qquad \text{et} \qquad \Big(\inf(f,g)\Big)(x) = \min(f(x),g(x))$$

1. Vérifier que : $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.
   En déduire que les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur I.
2. On pose $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0) = -\inf(f,0)$.
   Exprimer f^+ et f^- à l'aide de f et $|f|$. En déduire que f^+ et f^- sont continues sur I.