

1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$$

$$3. h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$$

$$5. u : x \mapsto \ln^3(x)$$

$$2. g : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{x^2-4}}$$

$$4. v : x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x^2-1} \right|$$

$$6. w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$7. z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) \text{ existe} \iff 2x^2 + 3x + 1 \geq 0 \iff (x+1)(2x+1) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$D_f =]-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty[$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$g(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ \frac{2x+3}{x^2-4} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \notin \{-2, 2\} \\ (2x+3)(x^2-4) \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right] \cup \left]2, +\infty[$$

$$D_g = \left]-2, -\frac{3}{2}\right] \cup \left]2, +\infty[$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$h(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} |x| > 0 \\ \ln(|x|) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln(|x|) > \ln(1) \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| > 1 \end{cases} \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$D_h =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$v(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ \left| \frac{x}{x^2-1} \right| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$D_v = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$u(x) \text{ existe} \iff \ln(x) \text{ existe} \iff x > 0$$

$$D_u =]0, +\infty[$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$w(x) \text{ existe} \iff \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) \text{ existe} \iff \begin{cases} 1+x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$D_w =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

(Remarquons que $w(x)$ a aussi un sens si $x = -(2k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, mais cela aura peu d'intérêt d'étudier w ailleurs que sur un intervalle).

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} \ln(x) \text{ existe} \\ \sqrt{-\ln(x)} \text{ existe} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ -\ln(x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \iff x \in]0, 1]$$

$$D_z =]0, 1]$$

2 Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f , puis montrer que f est impaire sur D_f .

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $1 + e^x > 1$, donc le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction f est donc bien définie sur $D_f = \mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x - 1)}{e^{-x}(e^x + 1)} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$

La fonction f est bien impaire.

3 Étudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 7}{x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad f_3(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1}, \quad f_4(x) = \frac{5x + 7}{3x - 2}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) \text{ existe} \iff x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$$

Ainsi, le domaine de définition de f_1 est $D =] - \infty, 1[\cup] 1, +\infty[$

S'il y a une symétrie, les x doivent être symétriques par rapport à 1.

Regardons donc $f_1(1+h)$ et $f_1(1-h)$ pour voir s'il y a une relation.

$$f_1(1-h) = \frac{(1-h)^2 - 5(1-h) - 7}{(1-h) - 1} = \frac{1 - 2h + h^2 - 5 + 5h - 7}{-h} = \frac{h^2 + 3h - 11}{-h} = \frac{-h^2 - 3h + 11}{h}$$

$$f_1(1+h) = \frac{(1+h)^2 - 5(1+h) - 7}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 5 - 5h - 7}{h} = \frac{h^2 - 3h - 11}{h}$$

On a donc

$$f_1(1-h) + f_1(1+h) = -6$$

autrement dit, pour tout $h > 0$,

$$\frac{f_1(1-h) + f_1(1+h)}{2} = -3$$

Autrement dit, le point de coordonnées $(1; -3)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f_1 .

2. Le domaine de définition de f_2 est \mathbb{R} . Regardons donc (sans autre indication) s'il y a une symétrie par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(-x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

On a donc

$$f_2(x) + f_2(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$$

autrement dit, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f_2(x) + f_2(-x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, le point de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f_2 .

3. Le domaine de définition de f_3 est $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \}$, donc est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.

$$f_3\left(\frac{1}{2} + h\right) = \dots = \dots = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 - \frac{5}{4}} \quad \text{et} \quad f_3\left(\frac{1}{2} - h\right) = \dots = \dots = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 - \frac{5}{4}}$$

donc f_3 admet un axe de symétrie d'équation $x = \frac{1}{2}$.

4. Le domaine de définition de f_4 est $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{2}{3} \}$. et

$$f_4\left(\frac{2}{3} + h\right) = \frac{\frac{10}{3} + 5h + 7}{h} = \frac{31}{3h} + 5 \quad \text{et} \quad f_4\left(\frac{2}{3} - h\right) = \frac{\frac{10}{3} - 5h + 7}{-h} = \frac{-31}{3h} + 5$$

donc $\frac{f_4(\frac{2}{3}+h) + f_4(\frac{2}{3}-h)}{2} = 5$, f_4 admet un centre de symétrie, le point de coordonnées $(\frac{2}{3}; 5)$.

4 Pour chaque fonction suivante, déterminer le domaine de définition, puis étudier ses variations sans dériver en étudiant une composition de fonctions monotones.

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $f : x \mapsto e^{-\sqrt{2-x}}$ | 3. $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(1+x)}$ | 5. $f : x \mapsto (\ln(e^{-x} + 1))^2$ |
| 2. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(e^{-x} - 1)}$ | 4. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{2-x}}}$ | 6. $f : x \mapsto \sqrt{e^{2+x} - 1}$ |

1. $f : x \mapsto e^{-\sqrt{2-x}}$ est définit sur $] -\infty, 2]$.

$t \mapsto 2 - t$ est décroissante sur $] -\infty, 2]$, à valeurs dans $[0, +\infty[$

$u \mapsto \sqrt{u}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$

$v \mapsto -t$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $] -\infty, 0]$

$w \mapsto e^w$ est croissante sur $] -\infty, 0]$, à valeurs dans $]0, 1]$.

Par composition, on en déduit que f est croissante sur $] -\infty, 2]$, et à valeurs dans $]0, 1]$.

2. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(e^{-x} - 1)}$ est définit sur $] -\infty, -\ln(2)]$.

$t \mapsto -t$ est décroissante sur $] -\infty, -\ln(2)]$, à valeurs dans $[\ln(2), +\infty[$

$u \mapsto e^u$ est croissante sur $[\ln(2), +\infty[$, à valeurs dans $[2, +\infty[$

$v \mapsto v - 1$ est croissante sur $[2, +\infty[$, à valeurs dans $[1, +\infty[$

$w \mapsto \ln(w)$ est croissante sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$

$z \mapsto \sqrt{z}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$

Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $] -\infty, -\ln(2)]$, et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

3. $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(1+x)}$ est définit sur $] -1, e - 1]$

$t \mapsto 1 + t$ est croissante sur $] -1, e - 1]$, à valeurs dans $]0, e]$

$u \mapsto \ln(u)$ est croissante sur $]0, e]$, à valeurs dans $] -\infty, 1]$

$v \mapsto 1 - v$ est décroissante sur $] -\infty, 1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$

$w \mapsto \sqrt{w}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $] -1, e - 1]$, et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{2-x}}}$ est définit sur $]2, +\infty[$.

$t \mapsto 2 - t$ est décroissante sur $]2, +\infty[$, à valeurs dans $] -\infty, 0]$

$u \mapsto e^u$ est croissante sur $] -\infty, 0]$ à valeurs dans $]0, 1]$

$v \mapsto 1 - v$ est décroissante sur $]0, 1]$ à valeurs dans $]0, 1]$

$w \mapsto \sqrt{w}$ est croissante sur $]0, 1]$ à valeurs dans $]0, 1]$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ est décroissante sur $]0, 1]$ à valeurs dans $]1, +\infty[$

Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $]2, +\infty[$, et à valeurs dans $]1, +\infty[$.

5. $f : x \mapsto (\ln(e^{-x} + 1))^2$ est définit sur \mathbb{R} .

$x \mapsto e^{-x} + 1$ est décroissante sur \mathbb{R} , à valeurs dans $]1, +\infty[$

$t \mapsto \ln(t)$ est croissante sur $]1, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$

$u \mapsto u^2$ est croissante sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$

Par composition, on en déduit que f est décroissante sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]0, +\infty[$.

6. $f : x \mapsto \sqrt{e^{2+x} - 1}$ est définit sur $[-2, +\infty[$.

$x \mapsto e^{2+x} - 1$ est croissante sur $[-2, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$

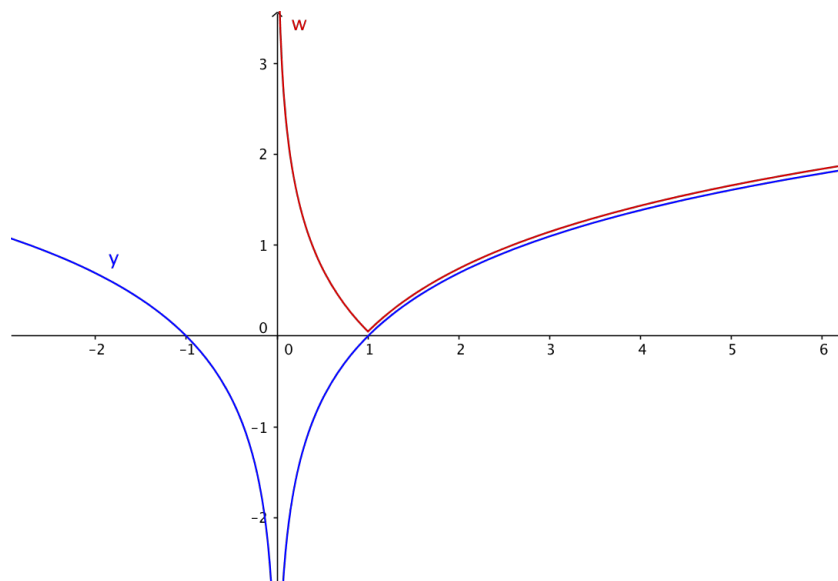
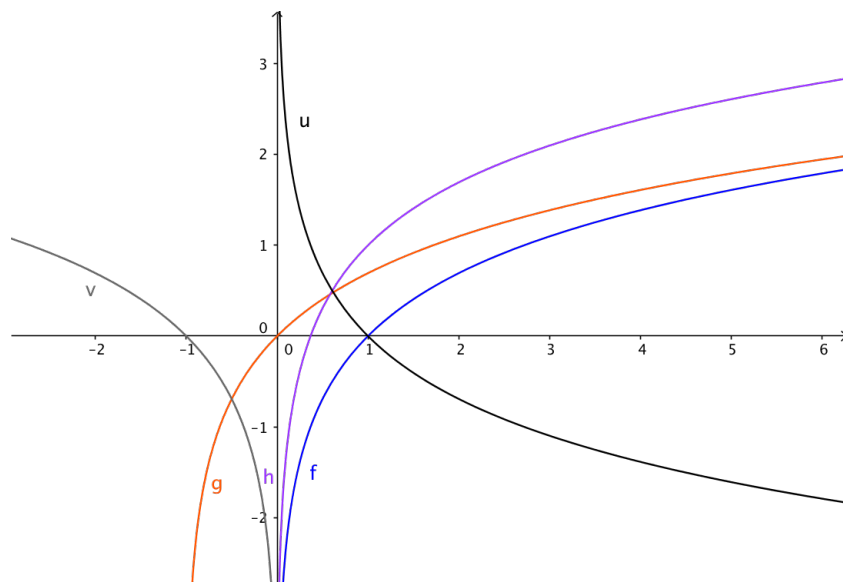
$y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Par composition, f est croissante sur $[-2, +\infty[$, et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

5 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \ln(x+1), \quad h(x) = \ln(x) + 1,$$

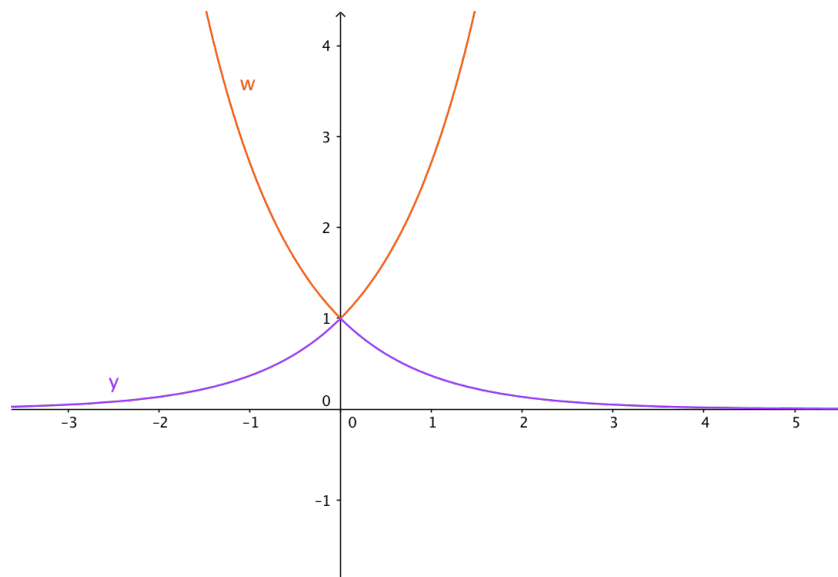
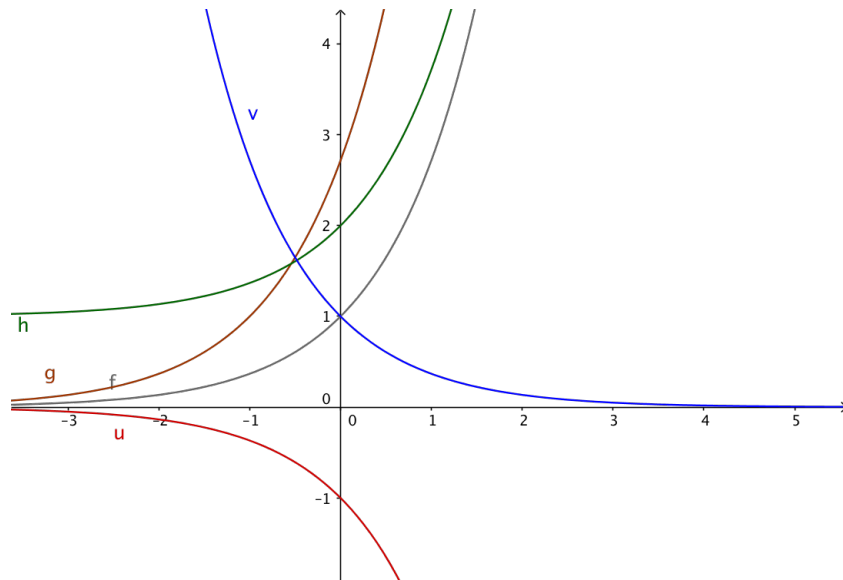
$$u(x) = -\ln(x), \quad v(x) = \ln(-x), \quad w(x) = |\ln(x)|, \quad y(x) = \ln(|x|)$$



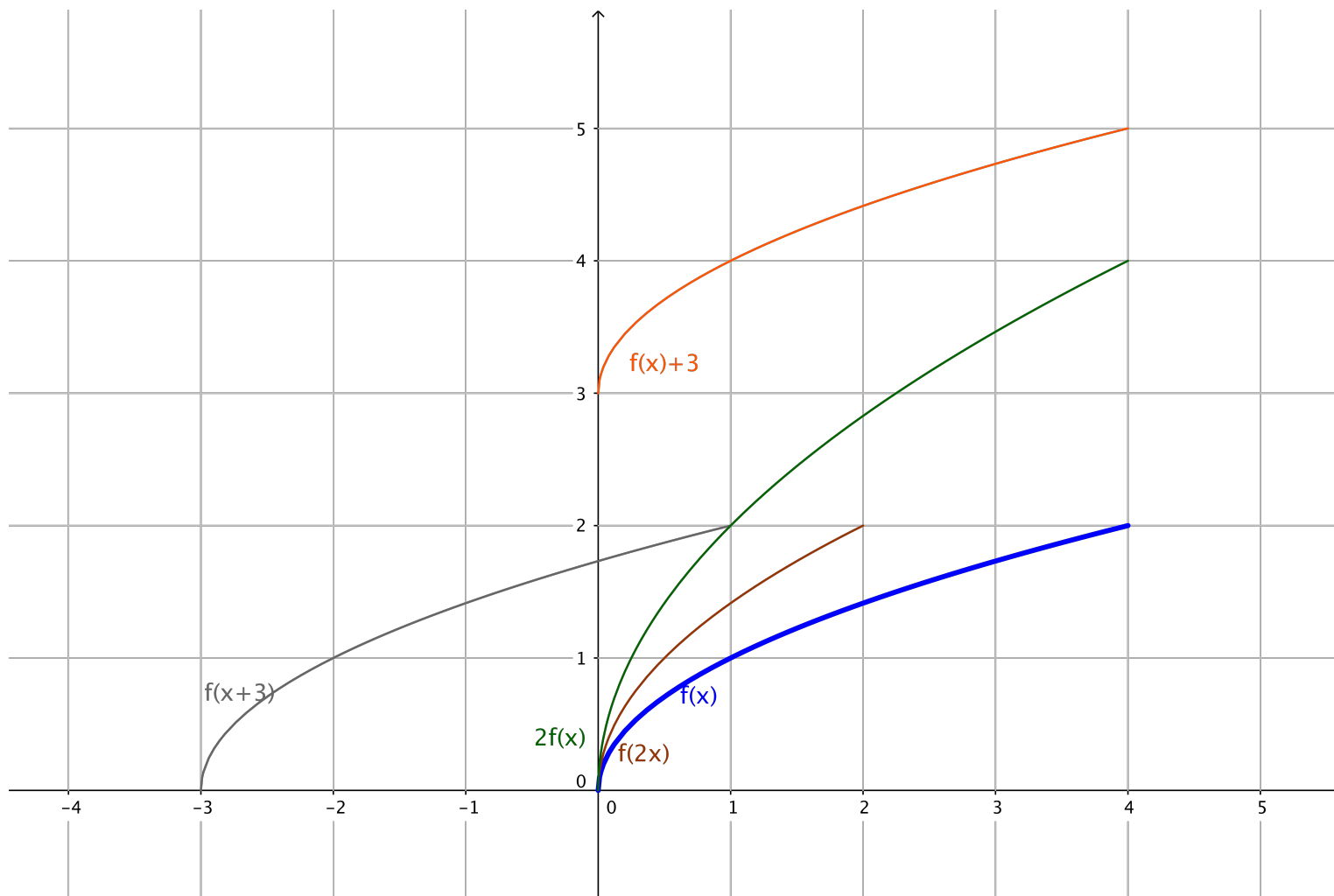
6 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{x+1}, \quad h(x) = e^x + 1,$$

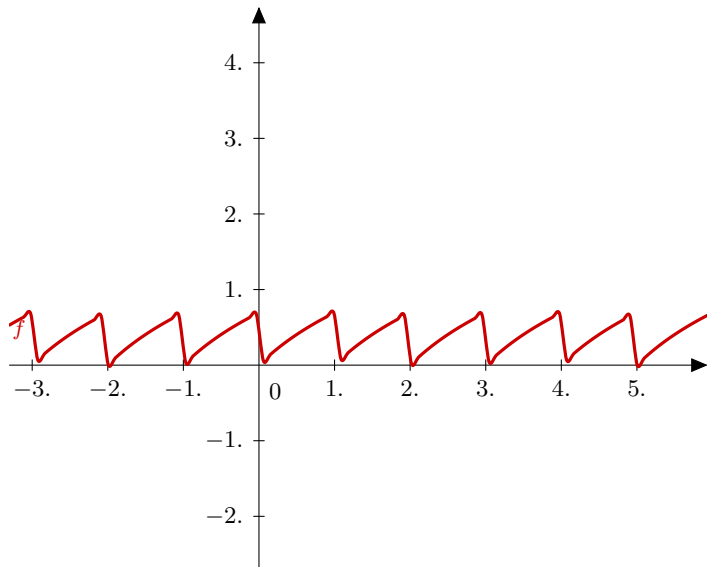
$$u(x) = -e^x \quad v(x) = e^{-x}, \quad w(x) = e^{|x|}, \quad y(x) = e^{-|x|}$$



7 Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 4]$. En déduire comment tracer le graphe des fonctions : $x \mapsto f(x) + 3$, $x \mapsto f(x + 3)$, $f(2x)$, $2f(x)$.



8 La fonction f est définie sur \mathbb{R} , de période 1, et vérifie : pour tout réel x de $[1, 2[$, $f(x) = \ln(x)$. Tracer la courbe représentative de la fonction f et déterminer l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 0[$



On a pour $x \in [-1, 0[$, on a $f(x) = \ln(x + 2)$.

9 Soit f définie sur \mathbb{R} telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq 1 - \frac{1}{x^2}$. Justifier que f est majorée sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $1 - \frac{1}{x^2} \leq 1$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq 1$$

On veut trouver un réel M tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$.

Prenons $M_0 = \max(f(0), 1)$, alors, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq 1 \leq M_0 \quad \text{et aussi} \quad f(0) \leq M_0$$

ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M_0$. Ainsi, f est majorée.

10 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0, +\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est born e sur $[0, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

Remarquons que : $\forall x \geq 0, f(x) = -\frac{(x+1)-1}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$.

Pour a et b positifs, on a :

$$a \leq b \implies 1+a \leq 1+b \implies \frac{1}{1+a} \geq \frac{1}{1+b} \implies -1 + \frac{1}{1+a} \geq -1 + \frac{1}{1+b} \frac{1}{1+a} \geq \frac{1}{1+b} f(a) \geq f(b)$$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$

Nécessairement, f atteint son maximum en 0 : $f(0) = 0$.

De plus, on voit que $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) > -1$, donc finalement : $\forall x \in [0, +\infty[, -1 < f(x) \leq 0$.

La fonction f est donc born e.

Cependant, f n'admet pas de minimum. En effet, f va diminuer pour se rapprocher de -1 mais ne va jamais l'atteindre :

$$f(x) = -1 \iff -\frac{x}{1+x} = -1 \iff -x = -x - 1 \iff -1 = 0 : \text{impossible}$$

La borne supérieure de f est son plus petit majorant, c'est donc ici le maximum qui est 0 .

La borne inférieure de f est son plus grand minorant, c'est donc ici -1 : c'est un minorant, et on ne peut pas en avoir de plus grand.

11

1. Déterminer les images directes suivantes :

- (a) $\exp(\mathbb{R})$
- (b) $\ln(]0, +\infty[)$
- (c) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$
- (d) $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$
- (e) $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$

2. Déterminer les images réciproques suivantes :

- (a) $\exp^{-1}([-1, 1])$
- (b) $\ln^{-1}(]1, 2])$
- (c) $\sin^{-1}([-1, 1])$
- (d) $\cos^{-1}(\mathbb{N})$

1. (a) $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[.$

(b) $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}.$

(c) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1].$

(d) $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[=]-1, 1[.$

(e) $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

2. (a) $\exp^{-1}([-1, 1]) = \exp^{-1}(]0, 1]) =]-\infty, 0]$

(b) $\ln^{-1}(]1, 2]) =]e, e^2].$

(c) $\sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$

(d) $\cos^{-1}(\mathbb{N}) = \cos^{-1}(\{0, 1\}) = \cos^{-1}(\{0\}) \cup \cos^{-1}(\{1\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

12 Pour chaque fonction, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent(s) de

$$y : \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \setminus \{1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$x \longmapsto 2x^2 + 3x + 4, \quad x \longmapsto \frac{4x + 5}{6x - 3}, \quad x \longmapsto \frac{1 + x}{1 - x}$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$2x^2 + 3x + 4 = y$$

autrement dit $2x^2 + 3x + (4 - y) = 0$.

$$\Delta = 9 - 8(4 - y) = 8y - 23.$$

Si $8y - 23 < 0$, alors y n'admet pas d'antécédent par f dans \mathbb{R} .

Si $8y - 23 = 0$, alors y admet un unique antécédent par f dans \mathbb{R} .

Si $8y - 23 > 0$, alors y admet exactement deux antécédents par f dans \mathbb{R} .

L'application f n'est ni injective, ni bijective.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons tous les $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ tels que

$$\frac{4x + 5}{6x - 3} = y$$

$$y = \frac{4x + 5}{6x - 3} \iff (6x - 3)y = 4x + 5 \iff 6xy - 4x = 5 + 3y \iff x(6y - 4) = 5 + 3y$$

Si $6y - 4 \neq 0$, alors y admet un unique antécédent par f dans \mathbb{R} .

Si $6y - 4 = 0$, alors y n'admet aucun antécédent par f dans \mathbb{R} .

L'application g est injective, mais non surjective.

3. Soit $y \in \mathbb{R}$, avec $y \neq -1$. Cherchons tous les $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que

$$\frac{1 + x}{1 - x} = y$$

$$y = \frac{1 + x}{1 - x} \iff (1 - x)y = 1 + x \iff -xy - x = 1 - y \iff x = \frac{1 - y}{-y - 1} = \frac{y - 1}{y + 1}$$

Donc y admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

L'application h est bijective.

13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

- Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
- Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

- Remarquons que la fonction f est paire.

Ainsi, par exemple $f(1) = f(-1)$, donc f ne peut pas être injective.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a clairement $f(x) > 0$, donc tout réel y strictement négatif n'admettra pas d'antécédent par f : f ne peut pas être surjective.

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$.

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\iff 2y = e^{-x}(e^{2x} - 1) \\ &\iff e^x 2y = e^{2x} - 1 \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff X^2 - 2yX - 1 = 0 \quad \text{avec } X = e^x \\ &\iff X = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{ou} \quad X = y - \sqrt{y^2 + 1} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}}_{\text{impossible}} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul antécédent par g qui est $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. On a donc

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\boxed{14} \text{ Soit } f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1+x^2} \end{array}$$

- Déterminer les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- Montrer que la restriction de g de f à $]1, +\infty[$ est bijective de $]1, +\infty[$ vers $]0, 1/2[$, et déterminer g^{-1} .

1. Pour déterminer $f^{-1}(\{1\})$ on cherche tous les antécédents de 1 par f :

$$f(x) = 1 \iff \frac{x}{1+x^2} = 1 \iff \underbrace{x^2 - x + 1 = 0}_{\Delta < 0} : \text{ pas de solution}$$

Donc $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. La fonction f n'est donc pas surjective.

Pour déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$ on cherche tous les antécédents de $1/3$ par f :

$$f(x) = \frac{1}{3} \iff \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{3} \iff \underbrace{x^2 - 3x + 1 = 0}_{\Delta = 5} \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Donc $f^{-1}(\{1/3\}) = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$. La fonction f n'est donc pas injective.

2. Notons :

$$g : \begin{array}{l}]1, +\infty[\longrightarrow]0, 1/2[\\ x \longmapsto \frac{x}{1+x^2} \end{array}$$

Soit $y \in]0, 1/2[$. Résolvons dans $]1, +\infty[$ l'équation $f(x) = y$.

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x^2} = y \iff \underbrace{yx^2 - x + y = 0}_{\Delta = 1-4y^2 > 0} \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \underset{x > 1}{\iff} x = \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

En effet pour la dernière équivalence :

$$\frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y} > 1 \iff \sqrt{1-4y^2} > \underbrace{2y-1}_{\text{négatif}} : \text{ toujours vrai}$$

$$\frac{1 - \sqrt{1-4y^2}}{2y} > 1 \iff \sqrt{1-4y^2} < 1-2y \iff 1-4y^2 < 1-4y+4y^2 \iff 4y < 8y^2 \iff 1 < 2y : \text{ faux ici}$$

Ainsi, finalement, pour tout $y \in]0, 1/2[$ l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]1/3[$ et

$$y = f(x) \iff x = \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Ainsi :

$$g^{-1} : \begin{array}{l}]0, 1/2[\longrightarrow]1, +\infty[\\ y \longmapsto \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y} \end{array}$$

15 1. Étudier et tracer les courbes représentatives de $f : x \mapsto \tan(\text{Arctan}(x))$ et $g : x \mapsto \text{Arctan}(\tan(x))$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Montrer que $\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \frac{3\pi}{4}$.

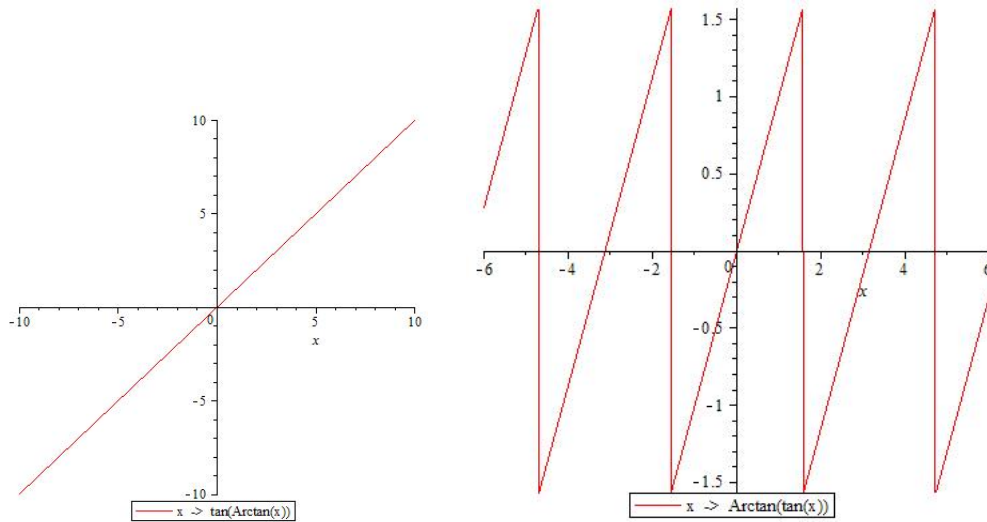
1. La fonction f est définie sur \mathbb{R} (car Arctan est définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $] -\pi/2, \pi/2[$, donc $\tan(\text{Arctan}(x))$ a bien un sens pour tout x), et par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \tan(\text{Arctan}(x)) = x$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ (là où $\tan(x)$ existe), et on sait que par définition :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

Remarquons que de plus, la fonction g est impaire (car \tan et Arctan le sont), et g est π -périodique (car \tan l'est). On en déduit le graphe de g :



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $y = \text{Arctan}(x)$ (on a donc $\tan(y) = x$). Alors :

$$\frac{\sin(y)}{\cos(y)} = x \implies \sin(y) = x \cos(y) \implies \sin^2(y) = x^2 \cos^2(y) \implies 1 - \cos^2(y) = x^2 \cos^2(y) \implies \cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

Or, $y = \text{Arctan}(x) \in] -\pi/2, \pi/2[$ donc $\cos(y) > 0$. Ainsi, $\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

De la même manière, on obtient $\sin^2(y) = x^2(1 - \sin^2(y)) \implies \sin^2(y) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Enfin, puisque $\sin(y)$ est du même signe que x , on en déduit : $\sin(y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Notons $\alpha = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$. Alors $\tan(\alpha) = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1$. Ainsi, $\tan(\alpha) = -1$.

Donc il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{-\pi}{4} + k\pi$. Or, $0 \leq \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc nécessairement $k = 1$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

16 Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur \mathbb{R} est constante.

Supposons que f soit T -périodique ($T > 0$), et par exemple croissante sur \mathbb{R} .

Prenons $a \in \mathbb{R}$ quelconque, alors $f(a) = f(a + T)$ par périodicité.

Or, f étant croissante sur $[a, a + T]$, on a :

$$\forall x \in [a, a + T], \quad a \leq x \leq a + T \implies f(a) \leq f(x) \leq f(a + T) \implies f(x) = f(a)$$

Ainsi, f est constante sur l'intervalle $[a, a + T]$, donc puisque f est constante sur toute la période, f est constante sur \mathbb{R} .

17 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur \mathbb{R} et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur \mathbb{R} . Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

Supposons qu'on ait $f(a) \leq f(b)$. Alors, puisque $f \circ f$ est croissante, on aurait $f \circ f(f(a)) \leq f \circ f(f(b))$, soit $f \circ f \circ f(a) \leq f \circ f \circ f(b)$. Or, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Ainsi, puisque $a < b$, on devrait avoir $f \circ f \circ f(a) > f \circ f \circ f(b)$: on arrive à une contradiction.

Ainsi l'hypothèse $f(a) \leq f(b)$ était nécessairement fautive ! On a donc obligatoirement $f(a) > f(b)$.

On a donc montré que si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Autrement dit, f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

18 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

1. La composée de deux applications injectives est injective.

Soit $f : E \rightarrow F$ injective et soit $g : F \rightarrow G$ injective.

Montrons que $g \circ f : E \rightarrow G$ est injective.

Soient $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \xrightarrow{g \text{ inj}} f(x) = f(x') \xrightarrow{f \text{ inj}} x = x'$$

Donc $g \circ f$ est bien injective.

2. La composée de deux applications surjectives est surjective.

Soit $f : E \rightarrow F$ surjective et soit $g : F \rightarrow G$ surjective.

Montrons que $g \circ f : E \rightarrow G$ est surjective.

Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, $\exists y \in F$ tel que $z = g(y)$. Or, f est surjective, donc puisque $y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Donc $g \circ f$ est bien surjective.

19 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ injective et f surjective, alors g injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.

1. Supposons $g \circ f : E \rightarrow G$ injective.

Montrons que f est injective.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

$$f(x) = f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies g \circ f(x) = g \circ f(x') \xrightarrow{g \circ f \text{ inj}} x = x'$$

Donc $g \circ f$ est injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective.

Montrons que g est surjective.

On sait que $\forall z \in G, \exists x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. On a écrit $z = g(y)$ avec $y = f(x) \in F$.

Donc g est surjective.

3. Supposons $g \circ f : E \rightarrow G$ injective et f surjective.

Montrons que g est injective.

Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$.

Puisque f est surjective, $\exists x \in E / y = f(x)$ et $\exists x' \in E / y' = f(x')$. Donc

$$g(y) = g(y') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies g \circ f(x) = g \circ f(x') \xrightarrow{g \circ f \text{ inj}} x = x' \implies f(x) = f(x') \implies y = y'$$

Donc g est bien injective.

4. Supposons $g \circ f : E \rightarrow G$ surjective et g injective.

Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$. Or, $g \circ f$ surjective. Donc $\exists x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$. Ainsi

$$g(y) = g \circ f(x) \implies g(y) = g(f(x)) \xrightarrow{g \text{ inj}} y = f(x)$$

et donc on a écrit $y = f(x)$ avec $x \in E$. Donc f est bien surjective.