

1 Généralités sur les fonctions

1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1} \\ 2. g : x \mapsto \sqrt{\frac{2x + 3}{x^2 - 4}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. h : x \mapsto \ln(\ln(|x|)) \\ 4. v : x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right| \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5. u : x \mapsto \ln^3(x) \\ 6. w : x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}} \\ 7. z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)} \end{array} \right.$$

2 Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f , puis montrer que f est impaire sur D_f .

3  tudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 7}{x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad f_3(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1}, \quad f_4(x) = \frac{5x + 7}{3x - 2}$$

4 Pour chaque fonction suivante, déterminer le domaine de définition, puis étudier ses variations sans dériver en étudiant une composition de fonctions monotones.

$$\left. \begin{array}{l} 1. f : x \mapsto e^{-\sqrt{2-x}} \\ 2. f : x \mapsto \sqrt{\ln(e^{-x} - 1)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(1+x)} \\ 4. f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5. f : x \mapsto (\ln(e^{-x} + 1))^2 \\ 6. f : x \mapsto \sqrt{e^{2+x} - 1} \end{array} \right.$$

2 Tracé de courbes

5 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \ln(x+1), \quad h(x) = \ln(x)+1, \quad u(x) = -\ln(x), \quad v(x) = \ln(-x), \quad w(x) = |\ln(x)|, \quad y(x) = \ln(|x|)$$

6 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{x+1}, \quad h(x) = e^x + 1, \quad u(x) = -e^x, \quad v(x) = e^{-x}, \quad w(x) = e^{|x|}, \quad y(x) = e^{-|x|}$$

7 Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 4]$. En déduire comment tracer le graphe des fonctions : $x \mapsto f(x) + 3$, $x \mapsto f(x + 3)$, $f(2x)$, $2f(x)$.

8 La fonction f est définie sur \mathbb{R} , de période 1, et vérifie : pour tout réel x de $[1, 2[$, $f(x) = \ln(x)$. Tracer la courbe représentative de la fonction f et déterminer l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 0[$

3 Majoration, minoration

9 Soit f définie sur \mathbb{R} telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq 1 - \frac{1}{x^2}$. Justifier que f est majorée sur \mathbb{R} .

10 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0, +\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

4 Images et antécédents

11 1. Déterminer les images directes suivantes : $\exp(\mathbb{R})$, $\ln(]0, +\infty[)$, $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$, $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$.

2. Déterminer les images réciproques suivantes : $\exp^{-1}([-1, 1])$, $\ln^{-1}([1, 2])$, $\sin^{-1}([-1, 1])$, $\cos^{-1}(\mathbb{N})$

12 Pour chaque fonction, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent(s) de y :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 3x + 4 \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{4x+5}{6x-3} \end{array}, \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1+x}{1-x} \end{array}$$

13 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.

2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

14 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+x^2} \end{array}$

1. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que la restriction de g de f à $]1, +\infty[$ est bijective de $]1, +\infty[$ vers $]0, 1/2[$, et déterminer g^{-1} .

15 1. Étudier et tracer les courbes représentatives de $f : x \mapsto \tan(\text{Arctan}(x))$ et $g : x \mapsto \text{Arctan}(\tan(x))$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Montrer que $\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \frac{3\pi}{4}$.

5 Exercices plus théoriques

16 Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur \mathbb{R} est constante.

17 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur \mathbb{R} et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur \mathbb{R} . Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

18 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

19 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3. Montrer que si $g \circ f$ injective et f surjective, alors g injective.

4. Montrer que si $g \circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.