

02.1 Soient a, b deux réels strictement positifs. On note : $m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$, $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Ranger les trois nombres m, g, h dans l'ordre croissant.

Soient $a, b \in]0, +\infty[$, et $m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$, $h = \frac{2ab}{a+b}$.

$$\begin{aligned} m \geq g &\iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \\ &\iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ &\iff (a+b)^2 \geq 4ab \quad (\text{car tout est positif}) \\ &\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\iff (a-b)^2 \geq 0 : \quad \text{toujours vrai} \end{aligned}$$

Ainsi : on a $m \geq g$.

$$\begin{aligned} g \geq h &\iff \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \\ &\iff a+b \geq 2\frac{ab}{\sqrt{ab}} \\ &\iff a+b \geq 2\sqrt{ab} : \quad \text{toujours vrai ( quivalent à } m \geq g) \end{aligned}$$

Ainsi : on a $g \geq h$.

Finalement, on a :

$$h \leq g \leq m$$

Remarquons qu'on pouvait aussi montrer que $m \geq h$ (même si les deux inégalités précédentes le montrent aussi par transitivité) :

$$\begin{aligned} m \geq h &\iff \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \\ &\iff (a+b)^2 \geq 4ab : \quad \text{toujours vrai ( quivalent à } m \geq g) \end{aligned}$$

Et donc on a bien $m \geq h$.

02.2 Démontrer les inégalités suivantes :

$$1. \forall a, b \in \mathbb{R} : ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$2. \forall a, b \in]0, +\infty[: \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$3. \forall a, b \in]0, +\infty[: \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$$

1. Pour tous réels a et b , on a :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0 : \text{ toujours vrai}$$

Ainsi, on a bien :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

2. Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff \frac{1}{2}\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left((ab)^{1/2}\right) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} : \text{ vrai (exo 1)}$$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

3. Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4} \iff 4a^2 \geq (3a-b)(a+b) \iff 4a^2 \geq 3a^2 + 2ab - b^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0 : \text{ vrai}$$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$$

02.3 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

- | | | |
|----------------------------|----------------------------------|--|
| 1. $ x = 5$ | 6. $ 2x + 3 - 2 - x = -3$ | 12. $ x + 2 \geq \frac{1 - x}{1 + x}$ |
| 2. $ x \leq 2$ | 7. $ x + 1 - 2x + 1 = 0$ | 13. $x + 1 \leq \sqrt{x + 2}$ |
| 3. $ x > 4$ | 8. $x - 2 = \sqrt{x}$ | 14. $ x^2 - 3 > 2$ |
| 4. $ x - 3 = \frac{5}{3}$ | 9. $ 2x - 1 \leq x + 2 $ | |
| 5. $ x + 2 = \frac{1}{2}$ | 10. $ x + 3 - 2 x - 1 > 2$ | |
| | 11. $ 2x + 1 \leq x + 2 + 2x$ | |

$$1. |x| = 5 \iff \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{\pm 5\}$$

$$2. |x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$$

$$\mathcal{S} = [-2, 2]$$

$$3. |x| > 4 \iff \begin{cases} x > 4 \\ \text{ou} \\ x < -4 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$$

$$4. |x - 3| = \frac{5}{3} \iff \begin{cases} x - 3 = \frac{5}{3} \\ \text{ou} \\ 3 - x = \frac{5}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{14}{3} \right\}$$

$$5. |x + 2| = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x + 2 = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2} \right\}$$

$$6. |2x + 3| - |2 - x| = -3?$$

Cherchons déjà à simplifier l'expression $|2x + 3| - |2 - x|$ en fonction du réel x .

x	$-\infty$	$-3/2$	2	$+\infty$
$ 2x + 3 $	$-2x - 3$	0	$2x + 3$	$2x + 3$
$ 2 - x $	$2 - x$	$2 - x$	0	$x - 2$
$ 2x + 3 - 2 - x $	$-x - 5$	$3x + 1$		$x + 5$

- **1er cas** : sur $] -\infty, -3/2]$, alors :

$$|2x + 3| - |2 - x| = -3 \iff -x - 5 = -3 \iff x = -2$$

$$\mathcal{S}_1 = \{-2\}$$

- **2ème cas** : sur $[-3/2, 2]$, alors :

$$|2x + 3| - |2 - x| = -3 \iff 3x + 1 = -3 \iff x = -\frac{4}{3}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

- **3ème cas** : sur $[2, +\infty[$, alors :

$$|2x + 3| - |2 - x| = -3 \iff x + 5 = -3 \iff x = -8 \notin [2, +\infty[$$

$$\mathcal{S}_3 = \emptyset$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}}$$

$$7. |x + 1| - |2x + 1| = 0 \iff |x + 1| = |2x + 1| \iff \begin{cases} x + 1 = 2x + 1 \\ \text{ou} \\ x + 1 = -(2x + 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}}$$

8. $x - 2 = \sqrt{x}$.

L'équation a un sens si et seulement si $x \geq 0$. On résout donc sur $[0, +\infty[$.

ATTENTION : on ne peut pas élever au carré, car les signes peuvent être différents (le signe du membre de gauche est incertain).

- Sur $[2, +\infty[$,

$$x - 2 = \sqrt{x} \iff (x - 2)^2 = x \iff x^2 - 4x + 4 = x \iff x^2 - 3x + 4 = 0 \iff \underbrace{x = -1}_{\text{impossible}} \text{ ou } x = 4$$

$$\mathcal{S}_1 = \{4\}.$$

- Sur $[0, 2[$,

$$x - 2 = \sqrt{x} : \text{ impossible (« négatif=positif »)}$$

$$\mathcal{S}_2 = \emptyset.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\}}$$

9. $|2x - 1| \leq |x + 2| \iff |2x - 1| - |x + 2| \leq 0.$

x	$-\infty$	-2	$1/2$	$+\infty$
$ 2x - 1 $	$1 - 2x$	$1 - 2x$	0	$2x - 1$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$ 2x - 1 - x + 2 $	$-x + 3$	$-3x - 1$		$x - 3$

- **1er cas** : sur $] -\infty, -2]$, alors :

$$|2x - 1| - |x + 2| \leq 0 \iff -x + 3 \leq 0 \iff x \geq 3 : \text{faux sur cet intervalle}$$

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset$$

- **2ème cas** : sur $[-2, 1/2]$, alors :

$$|2x - 1| - |x + 2| \leq 0 \iff -3x - 1 \leq 0 \iff x \geq \frac{-1}{3}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

- **3ème cas** : sur $[1/2, +\infty[$, alors :

$$|2x - 1| - |x + 2| \leq 0 \iff x - 3 \leq 0 \iff x \leq 3$$

$$\mathcal{S}_3 = \left[\frac{1}{2}, 3 \right]$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}, 3 \right]}$$

10. $|x + 3| - 2|x - 1| > 2$?

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$ x + 3 $		$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
$ x - 1 $		$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x + 3 - 2 x - 1 $		$x - 5$	$3x + 1$	$-x + 5$

- **1er cas** : sur $] -\infty, -3]$, alors :

$$|x + 3| - 2|x - 1| > 2 \iff x - 5 > 2 \iff x > 7 : \text{faux sur cet intervalle}$$

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset$$

- **2ème cas** : sur $[-3, 1]$, alors :

$$|x + 3| - 2|x - 1| > 2 \iff 3x + 1 > 2 \iff x > \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left] \frac{1}{3}, 1 \right]$$

- **3ème cas** : sur $[1, +\infty[$, alors :

$$|x + 3| - 2|x - 1| > 2 \iff -x + 5 > 2 \iff x < 3$$

$$\mathcal{S}_3 = [1, 3[$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left] \frac{1}{3}, 3 \right[}$$

$$11. |2x + 1| \leq |x + 2| + 2x \iff |2x + 1| - |x + 2| \leq 2x$$

x	$-\infty$	-2	$-1/2$	$+\infty$
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$	$-2x - 1$	0	$2x + 1$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$ 2x + 1 - x + 2 $	$-x + 1$	$-3x - 3$		$x - 1$

- **1er cas** : sur $] -\infty, -2]$, alors :

$$|2x + 1| - |x + 2| \leq 2x \iff -x + 1 \leq 2x \iff x \geq \frac{1}{3} : \text{faux sur cet intervalle}$$

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset$$

- **2ème cas** : sur $[-2, -1/2]$, alors :

$$|2x + 1| - |x + 2| \leq 2x \iff -3x - 3 \leq 2x \iff x \geq \frac{-3}{5}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left[\frac{-3}{5}, -\frac{1}{2} \right]$$

- **3ème cas** : sur $[-1/2, +\infty[$, alors :

$$|2x + 1| - |x + 2| \leq 2x \iff x - 1 \leq 2x \iff x \geq -1 : \text{toujours vrai}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

Finalement :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{-3}{5}, +\infty \right[$$

$$12. |x + 2| \geq \frac{1 - x}{1 + x}.$$

L'inéquation a un sens si et seulement si $x + 1 \neq 0$, autrement dit si et seulement si $x \neq -1$.

On résout donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- **1er cas** : Sur $] -\infty, -1[$, alors : $|x + 2| \geq 0$ et $\frac{1 - x}{1 + x} < 0$, donc l'inégalité est toujours vraie.

Ainsi, $\mathcal{S}_1 =] -\infty, -1[$.

- **2ème cas** : Sur $[1, +\infty[$, alors : $|x + 2| \geq 0$ et $\frac{1 - x}{1 + x} < 0$, donc l'inégalité est toujours vraie.

Ainsi, $\mathcal{S}_2 = [1, +\infty[$.

- **3ème cas** : Sur $] -1, 1[$, alors : $|x + 2| = x + 2 \geq 0$ et on a $1 + x > 0$, donc :

$$\begin{aligned} |x + 2| \geq \frac{1 - x}{1 + x} &\iff x + 2 \geq \frac{1 - x}{1 + x} \iff (x + 2)(1 + x) \geq 1 - x \iff x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ &\iff x \in] -\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_3 = [-2 + \sqrt{3}, 1]$

Finalement :

$$\mathcal{S} =] -\infty, -1[\cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty[$$

13. $x + 1 \leq \sqrt{x + 2}$

L'inéquation a un sens si et seulement si $x + 2 \geq 0$. On résout donc sur $[-2, +\infty[$.

- **1er cas** : Sur $[-2, -1[$, alors : $x + 1 \leq 0$ et $\sqrt{x + 2} \geq 0$, donc l'inéquation est toujours vraie sur cet intervalle.
- **2ème cas** : Sur $[-1, +\infty[$, alors : $x + 1 \geq 0$ et $\sqrt{x + 2} \geq 0$, donc

$$x + 1 \leq \sqrt{x + 2} \iff (x + 1)^2 \leq x + 2 \iff x^2 + 2x + 1 \leq x + 2 \iff x^2 + x - 1 \leq 0$$

$$\iff x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left[-2, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

14. $|x^2 - 3| > 2$.

- **1er cas** : Sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, alors : $3 - x^2 > 0$, donc :

$$|x^2 - 3| > 2 \iff 3 - x^2 > 2 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$

- **2ème cas** : Sur $[-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, alors :

$$|x^2 - 3| > 2 \iff x^2 - 3 > 2 \iff x^2 > 5 \iff \begin{cases} x > \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x < -\sqrt{5} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} =] -\infty, -\sqrt{5}[\cup] -1, 1[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$$

02.4 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

- **1er cas** : Sur $[1, +\infty[$, alors :

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1| \iff x^2 - x + 1 \geq x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 \geq -1 \iff (x - 1)^2 \geq -1 : \text{ toujours vrai}$$

- **2ème cas** : Sur $] -\infty, 1]$, alors :

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1| \iff x^2 - x + 1 \geq 1 - x \iff x^2 \geq 0 : \text{ toujours vrai}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq |x - 1|}$$

02.5 Soient x et y des réels tels que $0 \leq x \leq y$. Montrer que : $0 \leq x \leq \sqrt{xy} \leq y$.

$$0 \leq x \leq y \implies 0 \leq x^2 \leq xy$$

et

$$0 \leq x \leq y \implies 0 \leq xy \leq y^2$$

Donc :

$$0 \leq x^2 \leq xy \leq y^2$$

et donc :

$$0 \leq x \leq \sqrt{xy} \leq y$$

02.6 Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que : $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

L'idée dans cet exercice est de s'inspirer de la démonstration de l'inégalité triangulaire.

1. $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ étant positifs, les comparer revient à comparer leur carré.

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff a+b \leq a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \iff 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 : \text{ toujours vrai}$$

Donc on a bien :

$$\boxed{\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

2. Remarquons que, dans l'inégalité qu'on veut montrer, on peut permuter a et b , donc on peut toujours supposer que $a \leq b$, quitte à permuter les deux nombres.

Prenons donc $a \geq 0$ et $b \geq 0$ tels que $b-a \geq 0$. Alors :

$$\sqrt{b} = \sqrt{a+(b-a)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b-a}$$

et donc :

$$\boxed{\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a} = \sqrt{|a-b|}}$$

De plus, puisqu'on a supposé $a \leq b$, on a $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0$, donc on a aussi :

$$\boxed{\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0 \leq \sqrt{|a-b|}}$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{\max(\sqrt{a} - \sqrt{b}, \sqrt{b} - \sqrt{a}) \leq \sqrt{|a-b|}}$$

autrement dit :

$$\boxed{|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}}$$

02.7 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$

2. $6x^2 - x - 1 = 0$

3. $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

4. $2x^6 - 5x^3 + 1 = 0$

5. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

6. $x^9 - 1 = 0$

7. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

8. $2x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$

1. $x^2 + 3x + 2 = 0 \iff (x+1)(x+2) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = -2 :$

$$\mathcal{S} = \{-1, -2\}$$

2. $6x^2 - x - 1 = 0 \stackrel{\Delta=25}{\iff} x = \frac{1 \pm 5}{12} \iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{3}.$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$$

3. En posant $X = x^2$, on a

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0 \iff X^2 - 2X - 2 = 0$$

$$\stackrel{\Delta=12}{\iff} X = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\iff X = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\iff x^2 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 = 1 - \sqrt{3}}_{\text{impossible dans } \mathbb{R}}$$

$$\iff x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \right\}$$

4. En posant $X = x^3$, on a :

$$2x^6 - 5x^3 + 1 = 0 \iff 2X^2 - 5X + 1 = 0$$

$$\stackrel{\Delta=17}{\iff} X = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\iff x^3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{ou} \quad x^3 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$\iff x = \sqrt[3]{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \right)^{1/3} \right\}$$

5. On remarque que 1 est solution évidente de l'équation. En factorisant par $x - 1$, on obtient :

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \iff (x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0 \iff (x-1)(x+3)(x-5) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 5$$

$$\mathcal{S} = \{1; -3; 5\}$$

6. $x^9 - 1 = 0 \iff x^9 = 1 \iff x = \sqrt[9]{1} \iff x = 1$.

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

7. On remarque que 1 est solution évidente de l'équation. En factorisant par $x - 1$ on obtient :

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0 \iff (x-1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Or $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc est toujours strictement positif. Ainsi

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

8. On remarque que -1 est solution évidente de l'équation. En factorisant par $x + 1$, on obtient :

$$2x^3 + 4x^2 + x - 1 = (x+1)(2x^2 + 2x - 1)$$

Or, $2x^2 + 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 12$, donc a pour racines $\frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

02.8 Résoudre les inéquations suivantes après avoir précisé leur domaine de validité :

1. $\frac{2+x}{1-x} \leq 2.$

2. $\frac{x+1}{x^2-3} \leq -3.$

3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 3.$

4. $4x^3 - 8x^2 - 47x + 105 < 0$

5. $\frac{5x+2}{6x-1} \geq \frac{2x+9}{5x+10}$

1. On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\frac{2+x}{1-x} \leq 2 \iff \frac{(2+x) - 2(1-x)}{1-x} \leq 0 \iff \frac{3x}{1-x} \leq 0$$

On fait un tableau de signes:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$3x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$

$$\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$$

2. On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

$$\frac{x+1}{x^2-3} \leq -3 \iff \frac{x+1+3(x^2-3)}{x^2-3} \leq 0 \iff \frac{3x^2+x-8}{x^2-3} \leq 0$$

On a: $x^2 - 3 \leq 0 \iff -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ et $3x^2 + x - 8 \leq 0 \iff \frac{-1-\sqrt{97}}{6} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{97}}{6}$.

Remarquons que :

$$\frac{-1-\sqrt{97}}{6} < -\sqrt{3} < \frac{-1+\sqrt{97}}{6} < \sqrt{3}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{97}}{6}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-1+\sqrt{97}}{6}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 3$	$+$	0	$+$	0	$-$	$+$
$3x^2 + x - 8$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

On en déduit que :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{-1-\sqrt{97}}{6}; -\sqrt{3} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{97}}{6}; \sqrt{3} \right]$$

3. On résout sur $[1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 3 &\iff (x-1) + 2\sqrt{(x-1)(x+2)} + (x+2) \leq 9 \\ &\iff 2\sqrt{(x-1)(x+2)} \leq 8-2x \\ &\iff \sqrt{(x-1)(x+2)} \leq 4-x \end{aligned}$$

1er cas : Si $4-x < 0$ (c'est-à-dire $x > 4$), alors l'inéquation est impossible (on a « négatif \leq positif »).

2ème cas : Si $4-x \geq 0$ (c'est-à-dire $x \leq 4$), alors :

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} \leq 4-x \iff (x-1)(x+2) \leq (4-x)^2 \iff x^2+x-2 \leq 16-8x+x^2 \iff 9x \leq 18 \iff x \leq 2$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = [1; 2]$$

4. 3 est une racine du polynôme. On peut donc factoriser par $x - 3$, on a :

$$4x^3 - 8x^2 - 47x + 105 = (x - 3)(4x^2 + 4x - 35)$$

Le polynôme $4x^2 + 4x - 35$ a un discriminant $\Delta = 16 + 16 \times 35 = 16 \times 36 = 4^2 \times 6^2 = (24)^2$.

Les racines sont donc $\frac{-4 + 24}{8} = \frac{5}{2}$ et $\frac{-4 - 24}{8} = \frac{-7}{2}$. On sait donc que :

$$4x^2 + 4x - 35 < 0 \iff -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$$

On fait alors un tableau de signes.

x	$-\infty$	$-7/2$	$5/2$	3	$+\infty$
$x - 3$	-		-	- 0	+
$4x^2 + 4x - 35$	+	0	- 0	+	+

Ainsi :

$$\mathcal{S} =]-\infty; \frac{-7}{2}[\cup]\frac{5}{2}; 3[$$

5. On résout sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{6}; -2 \right\}$.

$$\frac{5x + 2}{6x - 1} \geq \frac{2x + 9}{5x + 10}$$

$$\iff \frac{5x + 2}{6x - 1} - \frac{2x + 9}{5x + 10} \geq 0$$

$$\iff \frac{(5x + 2)(5x + 10) - (2x + 9)(6x - 1)}{(6x - 1)(5x + 10)} \geq 0$$

$$\iff \frac{13x^2 + 8x + 29}{(6x - 1)(5x + 10)} \geq 0$$

Le polynôme $13x^2 + 8x + 29$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 13 \times 29 < 0$, donc est toujours positif.

Le signe ne dépend donc que du dénominateur, qui est déjà factorisé, donc du signe positif à l'extérieur des racines :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{6}; +\infty[$$

02.9 Résoudre les équations suivantes :

1. $2^{x^2} = 3^{x^3}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$
4. $\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}$ avec $a > 0$, $a \neq 1$.
5. $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.

1. On résout sur \mathbb{R}

$$2^{x^2} = 3^{x^3} \iff x^2 \ln(2) = x^3 \ln(3) \iff x^2(\ln(2) - x \ln(3)) = 0 \iff x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(2) - x \ln(3) = 0$$

$$\mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \right\}$$

2. On résout sur \mathbb{R}^+ .

- Pour $x = 0$, l'équation est bien vérifiée puisque $0^{\sqrt{0}} = 1 = (\sqrt{0})^0$. Ainsi, 0 est solution.
- Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\iff \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(\sqrt{x}) \\ &\iff \sqrt{x} \ln(x) - \frac{1}{2}x \ln(x) = 0 \\ &\iff \sqrt{x} \ln(x) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = 0 \\ &\iff \underbrace{\sqrt{x} = 0}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} = 2 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 4 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{0; 1; 4\}$$

3. On résout sur \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} &\iff 2^{x+4} - 2^{x+2} = 3^{x+2} - 3^x \\ &\iff 3 \times 2^{x+2} = 8 \times 3^x \\ &\iff 2^{x-1} = 3^{x-1} \\ &\iff (x-1) \ln(2) = (x-1) \ln(3) \\ &\iff x-1 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

4. On résout sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ ($\ln(x)$ a un sens uniquement si $x > 0$, et $\ln(x) \neq 0 \iff x \neq 1$).

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} &\iff (\ln(x))^2 = (\ln(a))^2 \\ &\iff \ln(x) = \ln(a) \text{ ou } \ln(x) = -\ln(a) \\ &\iff \ln(x) = \ln(a) \text{ ou } \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ &\iff x = a \text{ ou } x = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ a; \frac{1}{a} \right\}$$

5. On résout sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1 &\iff \ln((x-1)(x+1)) < \ln\left(\frac{x^2}{e}\right) \\ &\iff x^2 - 1 < \frac{x^2}{e} \\ &\iff x^2 < \frac{e}{e-1} \\ &\iff -\sqrt{\frac{e}{e-1}} < 1 < x < \sqrt{\frac{e}{e-1}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left] 1; \sqrt{\frac{e}{e-1}} \right[$$

02.10 Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que :

1. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.
2. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
3. $a + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{b}$.

1. Soient a, b strictement positifs.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \iff \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4 \iff a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0 : \text{VRAI}$$

Ainsi, on a bien :

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

2. Remarquons que pour tous réels positifs x et y :

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \implies x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \iff x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

On peut donc écrire que, pour a, b, c strictement positifs :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

En multipliant ces trois inégalités (tout est bien positif),

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}2\sqrt{bc}2\sqrt{ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

Ainsi :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

3. Soient a, b strictement positifs.

$$a + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{b} \iff \frac{a^2 + b - 2\sqrt{ba}}{a} \geq 0 \iff a^2 - 2a\sqrt{b} + b \geq 0 \iff (a - \sqrt{b})^2 \geq 0 : \text{VRAI}$$

Ainsi :

$$a + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{b}$$

02.11

Montrer pour tous réels x et y , et pour tout entier n , on a :

$$|x + y|^n \leq 2^n(|x|^n + |y|^n)$$

Soient x et y deux réels.

Notons $z = \max(|x|, |y|)$.

Par définition, on a $|x| \leq z$, et $|y| \leq z$.

De plus, pour tout $n \geq 0$, $z^n \leq |x|^n + |y|^n$ (puisque $|z|^n$ est nécessairement l'une des valeurs $|x|^n$ ou $|y|^n$, l'autre étant positive).

On peut donc dire que :

$$|x + y|^n = \left(|x + y|\right)^n \stackrel{I.T.}{\leq} \left(|x| + |y|\right)^n \leq \left(z + z\right)^n = (2z)^n = 2^n \times z^n \leq 2^n(|x|^n + |y|^n)$$

02.12 Pour les parties suivantes de \mathbb{R} , déterminer les bornes inférieures et supérieures si elles existent, et le maximum et minimum s'ils existent.

$$1. A = \left\{ 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$2. B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$3. C = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m}, n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m \right\}$$

$$4. D = \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2}, p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$5. E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Puisque :

$$\forall n \geq 1, 2 - \frac{1}{n} \geq 1$$

et que $1 \in A$, on a donc $\inf(A) = \min(A) = 1$. De plus,

$$\forall n \geq 1, 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

et que la suite d'éléments de A ($2 - \frac{1}{n}$) se rapproche de 2 lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\sup(A) = 2$, mais 2 n'étant jamais atteint, A n'admet pas de maximum.

2. Puisque :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}^*, -1 = 1 - 1 - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 3$$

et que $-1 \in B$ et $3 \in B$, on a $\inf(B) = \min(B) = -1$ et $\sup(B) = \max(B) = 3$.

3. Puisque :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}^* \text{ avec } n \neq m, 0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$$

et que $0 \in C$ et $2 \in C$, on a $\inf(C) = \min(C) = 0$ et $\sup(C) = \max(C) = 2$.

4. On sait que $(p-q)^2 \geq 0$, donc on en déduit que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \frac{pq}{p^2 + q^2} \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit que D est majorée, et comme $1/2 \in D$, on a $\sup(D) = \max(D) = 1/2$.

De plus, 0 minore clairement D , et la suite d'élément de D : $\left(\frac{n \times 1}{n^2 + 1}\right)$ se rapproche de 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\inf(D) = 0$ mais 0 n'étant jamais atteint, D n'admet pas de minimum.

5. On a clairement que :

$$\forall n \geq 1, -1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1$$

L'ensemble E est donc minoré et majoré, il admet donc borne supérieure et inférieure. Remarquons que plus précisément, on a :

$$\forall n \geq 1, -1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$$

donc $\inf(E) = \min(E) = -1$ et $\sup(E) = \max(E) = \frac{1}{2}$.

02.13 Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n} \right], \quad J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[, \quad K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + 1[$$

1. $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n} \right] = [-1, 0].$

2. $J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$

3. $K = \mathbb{R}$

02.14 Si I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} tels que $I \cap J \neq \emptyset$, montrer que $I \cup J$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Supposons que I et J soient bien des intervalles.

Prenons $x \in I \cup J$ et $y \in I \cup J$ tels que $x \leq y$.

Montrons que pour tout t tel que $x \leq t \leq y$, on a encore $t \in I \cup J$.

Si $x \in I$ et $y \in I$, alors puisque I est un intervalle, si $x \leq t \leq y$, alors $t \in I$ aussi.

Si $x \in J$ et $y \in J$, alors puisque J est un intervalle, si $x \leq t \leq y$, alors $t \in J$ aussi.

Si $x \in I$ et $y \in J$, on sait qu'il existe au moins un $z \in I \cap J$, donc on a nécessairement :

$$x \leq z \leq y$$

Pour tout t tel que $x \leq t \leq y$, si $x \leq t \leq z$, alors $t \in I$ et si $z \leq t \leq y$, alors $t \in J$.

Ainsi, dans tous les cas, $t \in I \cup J$.

On fait le même raisonnement si $x \in J$ et $y \in I$.