CHAPITRE 3

Les nombres complexes et la trigonométrie

"Les états d'esprit, comme les actes, varient selon l'angle sous lequel on les examine." *E*lla Maillart

1 L'ensemble des nombres complexes

1.1 Définitions

Définition 1
On appelle **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme

$$x + iy, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

où i est un nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.
Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est alors unique :

- le réel x s'appelle la **partie réelle de** z, on le note $x = \mathrm{Re}(z)$.
- le réel y s'appelle la **partie imaginaire de** z, on le note $y = \mathrm{Im}(z)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarques :

R 1 – L'écriture $x + iy$ d'un nombre complexe s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

R 2 – Les nombres réels sont les nombres complexes particuliers : ils ont une partie imaginaire nulle.

R 3 – Les nombres complexes de la forme iy ($y \in \mathbb{R}$) sont appelés des **imaginaires purs**.

R 4 – On peut agir sur les nombres complexes comme sur les réels : les règles de développement et de factorisation sont encore vraies, il faut juste utiliser que $i^2 = -1$.

R 5 – On peut additionner deux nombres complexes : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$

R 6 – On peut aussi multiplier deux nombres complexes : $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

Exemples :

E 1 – On considère $z = 1 + \frac{1}{2}i$. Donner la partie réelle et la partie imaginiaire de z.

E 2 – On donne $z' = \frac{3}{2} - 2i$. Calculer $z + z'$ et $z \times z'$.

Proposition 2 ***Formule du binôme de Newton***

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}$$

Exemple :

Donner la formule du binôme de Newton pour n = 5.

Proposition 3 ***Identité remarquable généralisée***

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\boxed{z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}}$$

Exemple :

Factoriser $z^3 - z'^3$.

1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle **conjugué de z** le nombre complexe, noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 5

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. Alors

1. $\boxed{z \times \overline{z} = x^2 + y^2}$ *: c'est toujours un réel positif.*
2. $\boxed{Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}}$
3. $\boxed{Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. *z est un nombre réel* $\Longleftrightarrow z = \overline{z}$
6. *z est un imaginaire pur* $\Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
7. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Remarque :

On peut aussi définir l'inverse d'un nombre complexe (non nul) en s'aidant du conjugué :

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\overline{z}}{x^2+y^2}$$

Remarquons alors que pour tout complexe z non nul : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$
Donc pour tous complexes z et z' avec z' non nul : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Exemples :

E 1 – Donner le conjugué de z.

E 2 – Calculer l'inverse de z puis $\frac{z}{z'}$.

1.3 Equation du second degré à coefficients réels

Théorème 6
On considère l'équation

$$(E) : az^2+bz+c=0$$

où $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$, et z l'inconnue est complexe.
On appelle ***discriminant de l'équation*** (E) $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$*, qui est encore un réel.*

- *Si $\Delta\geqslant 0$, alors l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ (confondues si $\Delta=0$) qui sont*

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad et\quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta<0$, alors l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont conjuguées :*

$$\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\quad et\quad \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Proposition 7 ***Relations coefficients-racines***
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.
Alors

$$\boxed{z_1+z_2=-\frac{b}{a}},\qquad \boxed{z_1z_2=\frac{c}{a}}$$

Exemple :

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante : $z^2+z+1=0$

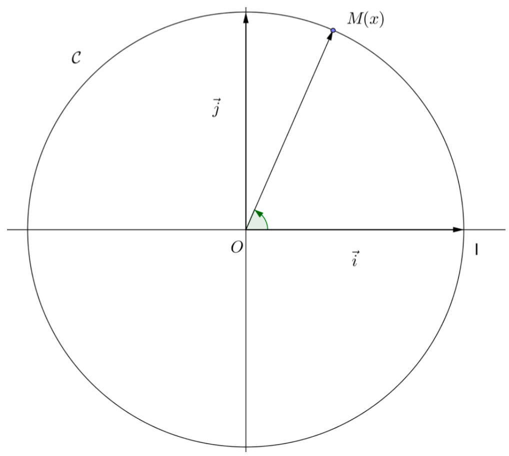
2 Trigonométrie

2.1 Cosinus, sinus, tangente d'un nombre réel

Définition 8

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1, de centre 0 et que l'on parcourt dans le sens anti-horaire. On repère chaque point de $\mathcal{C}$ par un angle $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ (angle avec l'axe horizontal), l'angle θ étant un réel quelconque. On appelle :

- **cosinus de θ** l'abscisse du point M, notée $\cos(\theta)$.
- **sinus de θ** l'ordonnée du point M, notée $\sin(\theta)$.
- **tangente de θ**, lorsqu'elle existe, la quantité $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.



Proposition 9

1. *Par définition, pour tout réel θ,*

$$\boxed{-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1} \qquad \boxed{-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1}, \qquad \boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1}$$

2. *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont 2π-périodiques dans le sens où :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

Proposition 10

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ ou \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -y + 2k\pi \end{cases} \quad et \quad \sin(x) = \sin(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ ou \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = (\pi - y) + 2k\pi \end{cases}$$

Remarques :

R 1 –

$$\boxed{\cos(x) = 0} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad \boxed{\sin(x) = 0} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = k\pi$$
$$\boxed{\cos(x) = 1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2k\pi \qquad \boxed{\sin(x) = 1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\boxed{\cos(x) = -1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \pi + 2k\pi \qquad \boxed{\sin(x) = -1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

R 2 – En particulier, $\tan(\theta)$ n'a de sens que lorsque $\cos(\theta) \neq 0$:

$$\boxed{\tan(x) \text{ existe } \iff x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Exemples :

E 1 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E 2 – Résoudre l'inéquation suivante dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$: $cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$

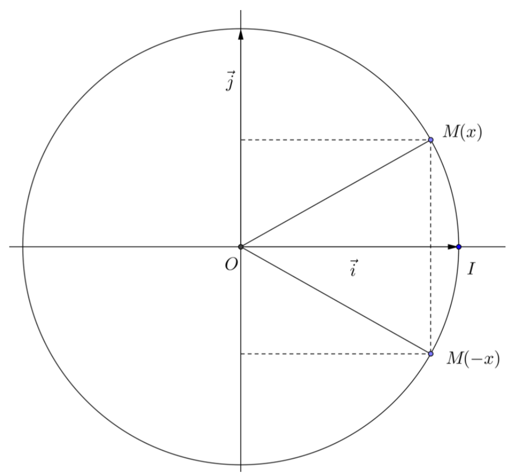
2.2 Formules de symétrie

Proposition 11

La fonction cos *est paire et la fonction* sin *est impaire, autrement dit :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)} \qquad et \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)}$$

La fonction tan *est impaire, autrement dit :* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(-x) = -\tan(x)}$.



Proposition 12 ***Formules de symétries***

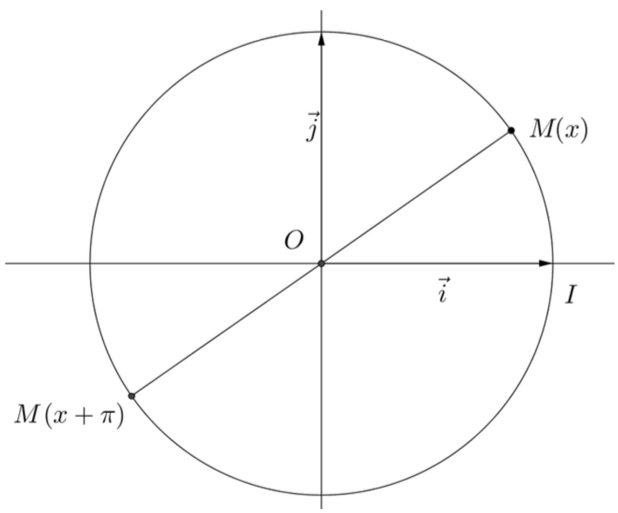
Pour tout réel x tel que les expressions aient un sens, on a :

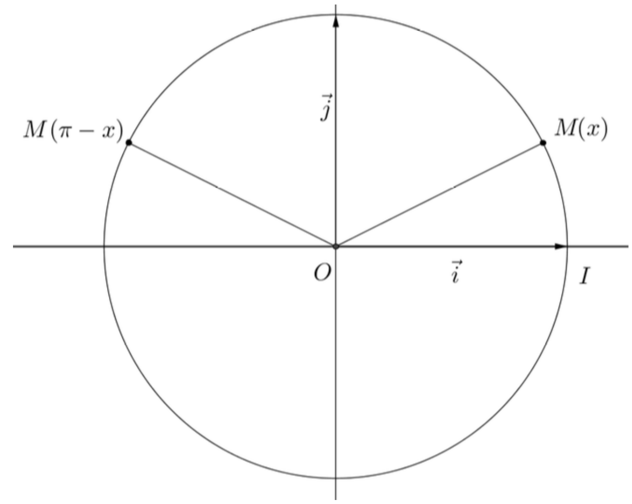
$$\boxed{\cos(x+\pi) = -\cos(x)} \quad \boxed{\sin(x+\pi) = -\sin(x)} \quad \boxed{\tan(x+\pi) = \tan(x)}$$

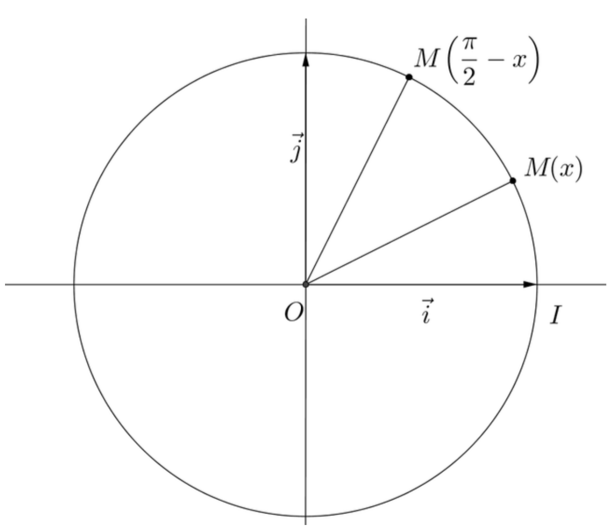
$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x)} \quad \boxed{\sin(\pi - x) = \sin(x)} \quad \boxed{\tan(\pi - x) = -\tan(x)}$$

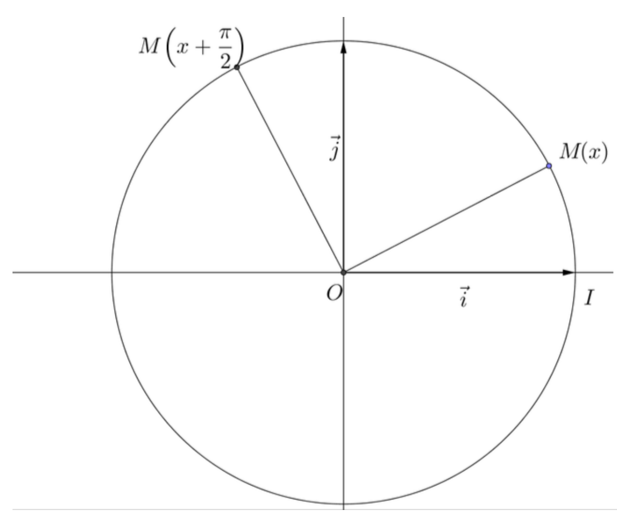
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)} \quad \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}}$$

$$\boxed{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)} \quad \boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)} \quad \boxed{\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}}$$



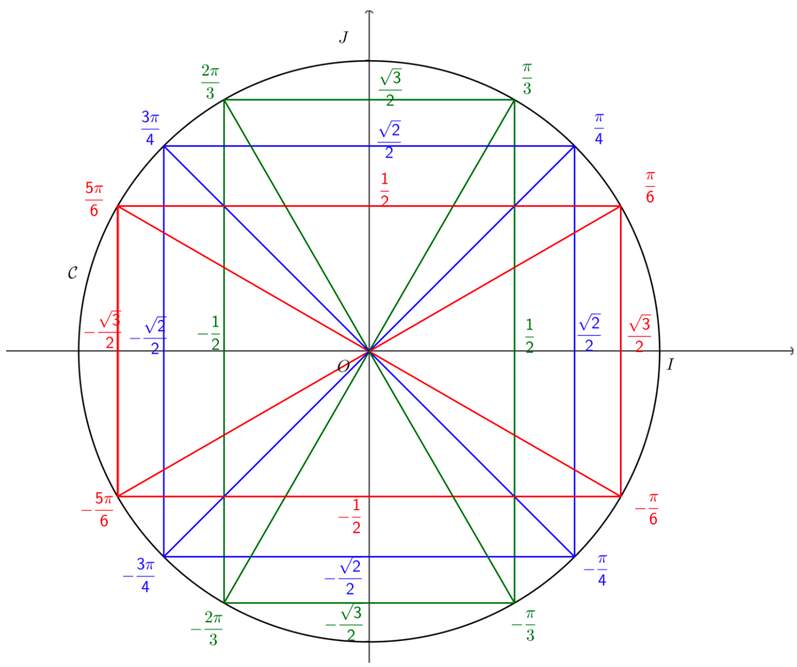






Théorème 13 ***Trigonométrie remarquable***

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\star\star$



Théorème 14 ***Formules d'addition***

Pour tous réels a et b, on a :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \quad \textit{et} \quad \boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$$

On en déduit que, lorsque les expressions ont un sens : $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}}$.

Remarques :

R 1 – En particulier, on a : $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

R 2 – On peut en déduire également les **Formules de duplication** :

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)} \qquad \boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$$

3 Lien entre les complexes et la trigonométrie

3.1 Module d'un nombre complexe

Définition 15
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Alors, on appelle **module de z** le réel positif noté $|z|$ défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Proposition 16
Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

1. $\boxed{z \times \overline{z} = |z|^2}$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $Re(z) \leqslant |z|$ *et* $Im(z) \leqslant |z|$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ *et si z' non nul,* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Théorème 17 ***Inégalité triangulaire***
Pour tous nombres complexes z et z', on a $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$.

Remarque :

> Le module prolonge aux complexes la notion de valeur absolue. On garde donc la même notation.

3.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Théorème 18
Pour tous réels a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$, il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Définition 19
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe égal à : $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$.

Remarques :

> **R 1** – On prend la notation exponentielle car avec les formules d'addition en trigonométrie, on a exactement que :
> $$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$$
> **R 2** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})}$ et $\boxed{\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})}$.
>
> **R 3** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$
>
> **R 4** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = 1$
>
> **R 5** – Réciproquement, pour tout complexe z tel que $|z| = 1$, il existe θ tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 20 ***Formule de Moivre***

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$.

Autrement dit, on a : $\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$.

Théorème 21 ***Formules d'Euler***

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}, \qquad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Définition 22

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **argument** de z tout réel θ qui vérifie $\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}}$.
On note $\arg(z)$ un tel réel. L'écriture $\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$ est appelée la **forme trigonométrique**.
L'écriture $z = |z|e^{i\arg(z)}$ est appelée **forme exponentielle** de z.

Exemple :

> Donner sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Proposition 23

Soient z et z' deux nombres complexes, alors

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

Remarques :

- **R 1** – Le module est unique, on dit donc « le » module de z
- **R 2** – Il n'y a pas unicité de l'argument d'un complexe, on dit donc « un » argument de z.
- **R 3** – Un complexe z admet un unique argument dans tout intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$ de longueur 2π.

3.3 Utilisation des nombres complexes en trigonométrie

Remarques :

- **R 1** – On peut grâce à l'écriture des nombres complexes sous forme trigonométrique redémontrer facilement les formules d'addition ou de duplication.
- **R 2** – On peut surtout utiliser les formules d'Euler pour **linéariser** des puissances de cosinus ou sinus, c'est-à-dire mettre un produit de cosinus ou sinus sous la forme d'une somme de cosinus et de sinus. Par exemple :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}, \qquad \cos^3(x)\sin(x) = \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

- **R 3** – On peut également montrer plein d'autres formules (qui ne sont pas à retenir, mais à refaire). Par exemples, pour tous réels a et b, on a les **formules de l'angle moitié** :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$