

# CHAPITRE 1

## Les nombres entiers

”Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.” *Euclide*

### Définition 1

### Les ensembles de nombres

- On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des **nombres entiers naturels**, c'est-à-dire les nombres entiers positifs ou nuls :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- On note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des **nombres entiers relatifs**, c'est-à-dire les nombres entiers de signe quelconque :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble de tous les **nombres réels**.
- On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble de tous les **nombres complexes**.

### Remarques :

**R1** – Lorsqu'on veut désigner l'ensemble des réels non nuls, ou des entiers naturels (ou relatifs) non nuls, on note alors  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}^*$  ou  $\mathbb{R}^*$  :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

**R2** – Si  $p$  et  $n$  désignent deux entiers tels que  $p \leq n$ , on note  $\llbracket p, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre  $p$  et  $n$  :

$$\llbracket p, n \rrbracket = \{p, p+1, p+2, \dots, n-2, n-1, n\}$$

**R3** – Les ensembles précédents sont contenus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

# 1 Introduction sur les suites

## Définition 2

## Suites de réels

Une liste ordonnée de nombres réels, indexée par des entiers naturels, est appelée une **suite**.

Si les éléments de la suite sont notés  $u_0, u_1, u_2, \dots$  on note la suite :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \geq 0} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$$

## Remarques :

- R1** – Une suite peut être indexée sur  $\mathbb{N}^*$  plutôt que sur  $\mathbb{N}$ .
- R2** – Une suite est **bien définie** si on peut bien calculer chaque terme dans la liste  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- R3** – La lettre d'indexation est muette. La suite peut être notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ou même  $u$ .
- R4** – Une suite peut être finie : si elle contient  $p$  éléments,  $(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$  est appelée une  **$p$ -liste** ou un  **$p$ -uplet**.
- R5** – L'ordre entre les éléments de la suite est important : la présence de parenthèses justifie l'ordre.
- R6** – Si  $p = 2$ , on dit qu'on a un **couple**  $(u_1, u_2)$ .
- R7** – Si  $p = 3$ , on dit qu'on a un **triplet**  $(u_1, u_2, u_3)$ .
- R8** – Soit  $n \in \mathbb{N}$ , le réel  $u_n$  est appelé **terme d'indice  $n$**  de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
- R9** – Attention : ne pas confondre le terme  $u_n$  et la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ . De même  $u_n + 1$  et  $u_{n+1}$  ne représentent pas le même nombre en général.
- R10** – Avec les notations des chapitres suivants, une suite de réels est une **application** de  $\mathbb{N}$  (ou d'une partie de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{R}$ ).

$$(u_n)_{n \geq 0} : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array}$$

## Exemples :

- E1** – Une suite peut être explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Le symbole "∀" signifie « **Pour tout** » ou « **Quelque soit** ». On connaît donc ici dès le départ chaque terme de la suite.

- E2** – Une suite peut être définie par une formule de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n + 1} - u_{n+1} + 2 \end{cases}$$

Une suite récurrente nécessite d'avoir des informations sur le (ou les) premier(s) terme(s). Une telle suite n'est peut-être pas forcément bien définie.

- E3** – Une suite peut être définie de manière implicite :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est l'unique solution positive de l'équation  $e^{-x} x^n = 1$ .

Une telle suite n'est peut-être pas forcément bien définie.

*(L'équation admet-elle des solutions ? une unique ?)*

**Définition 3****Suites monotones**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels.

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **croissante** si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **décroissante** si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .
- Si les inégalités sont strictes, on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

**Exemples :**

**E1** – Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Par exemple, la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ .

**E2** – Une suite est dite **croissante à partir d'un certain rang  $k$**  lorsque :  $\forall n \geq k, u_n \leq u_{n+1}$ .

De même,  $(u_n)$  est **décroissante à partir d'un certain rang  $k$**  lorsque :  $\forall n \geq k, u_n \geq u_{n+1}$ .

**Remarques :**

**R1** – Une suite est **stationnaire** si elle constante à partir d'un certain rang.

**R2** – Pour étudier si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, on étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs, i.e. on regarde le signe de  $u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

**R3** – Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à termes tous strictement positifs, i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ , alors,

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

**Définition 4****Suites majorées, minorées, bornées**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. On dit que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** si

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **minorée** si

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si

$$\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

ou de manière équivalente en utilisant les valeurs absolues, si :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \alpha$

**Remarques :**

**R1** – Un réel  $m$  (resp. un réel  $M$ ) qui vérifie les inégalités précédentes est appelé un **minorant** (resp. un **majorant**) de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**R2** – Le symbole "∃" signifie « **il existe** » et le symbole "/" signifie « tel que ».

**R3** – Le symbole "∃!" (non présent ici) signifierait « **il existe un unique** ».

**R4** – Attention, l'ordre des symboles mathématiques a une importance : la phrase

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R} / u_n \leq M$$

est toujours vraie, et ne signifie absolument pas qu'une suite est majorée.

## 2 Le raisonnement par récurrence

### Proposition 5

### Principe de récurrence (simple)

Soit  $(\mathcal{P}(n))$  une proposition mathématique dépendant de l'entier naturel  $n$ .

Pour montrer que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq 0$ , il suffit de démontrer que :

- la proposition  $\mathcal{P}(0)$  est vraie (**initialisation**)
- pour n'importe quel entier  $n \geq 0$  fixé, si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également (**hérédité**)

### Exemple :

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$ .

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq 1$ .

Notons donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : " $0 \leq u_n \leq 1$ ".

- Pour  $n = 0$ , vérifions que la propriété est vraie :  
On a par définition  $u_0 = 0$ , donc on a bien  $0 \leq u_0 \leq 1$  : la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.  
On sait que  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$ . Puisqu'on a supposé que  $u_n \geq 0$ , alors  $u_{n+1}$  est le quotient de deux nombres positifs, donc est encore positif. De plus, on sait que  $u_n + 1 \leq u_n + 2$ , donc  $\frac{u_n + 1}{u_n + 2} \leq 1$ . On a donc bien que  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ . La propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.
- Par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

### Proposition 6

### Principe de récurrence double

Soit  $(\mathcal{P}(n))$  une proposition mathématique dépendant de l'entier naturel  $n$ .

Pour montrer que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq 0$ , il suffit de démontrer que :

- les propositions  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies.
- pour n'importe quel entier  $n \geq 0$ , si  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies, alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie également.

### Exemple :

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ .

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 2^n + 3^n$ .

Notons donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n = 2^n + 3^n$ ".

- Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 2$ , et  $2^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.  
Pour  $n = 1$ , on a  $u_1 = 5$ , et  $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$  :  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  soient vraies. Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est encore vraie.  
On a supposé que  $u_n = 2^n + 3^n$  et que  $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ . Alors :

$$u_{n+2} = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) = 2^n(2 \times 5 - 6) + 3^n(3 \times 5 - 6) = 2^n \times 4 + 3^n \times 9 = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

La propriété  $\mathcal{P}(n+2)$  est encore vraie.

- Par récurrence double, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

**Proposition 7****Principe de récurrence forte (ou généralisée)**

Soit  $(\mathcal{P}(n))$  une proposition mathématique dépendant de l'entier naturel  $n$ .

Pour montrer que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq 0$ , il suffit de démontrer que :

- la proposition  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- pour n'importe quel entier  $n \geq 0$ ,

si  $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$  sont vraies, alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également

**Exemple :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \dots + u_n}$ .

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n$  existe et  $u_n \geq 0$ .

Notons donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n$  existe et  $u_n \geq 0$ ".

- Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$  soient vraies. Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.

On a supposé qu'on avait défini les nombres  $u_0, u_1, \dots, u_n$  et que  $u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0$ .

Alors  $u_0 + u_1 + \dots + u_n \geq 0$ , on peut donc bien définir  $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \dots + u_n}$  et comme une racine carrée est toujours positive, on a bien  $u_{n+1} \geq 0$ .

La propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie.

- Par récurrence forte, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

### 3 Suites usuelles

#### 3.1 Suites arithmétiques

**Définition 8**

Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de réels est dite **arithmétique** de raison  $r$  si :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$

**Proposition 9**

Soit  $r \in \mathbb{R}$ , et soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr}$$

**Remarque :**

Si la suite est définie à partir du rang  $k$ , on a :  $\forall n \geq k$ ,  $u_n = u_k + (n - k)r$ .

**Proposition 10**

Soit  $r \in \mathbb{R}$ , et soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . On a alors :

- $(u_n)$  est croissante si et seulement si  $r \geq 0$ .
- $(u_n)$  est décroissante si et seulement si  $r \leq 0$ .

#### 3.2 Suites géométriques

**Définition 11**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de réels est dite **géométrique** de raison  $q$  si :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n$

**Proposition 12**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ , et soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite géométrique de raison  $q$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$$

**Remarque :**

Si la suite est définie à partir du rang  $k$ , on a :  $\forall n \geq k, u_n = q^{n-k} u_k$ .

**Proposition 13**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ , et soit  $u_n = q^n$ .  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donc la suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $1 > 0$ . On a alors :

- $(u_n)$  est croissante si et seulement si  $q > 1$ .
- $(u_n)$  est décroissante si et seulement si  $0 < q < 1$ .
- $(u_n)$  est constante si et seulement si  $q = 0$  ou  $q = 1$ .
- $(u_n)$  n'est pas monotone si et seulement si  $q < 0$ .

**3.3 Suites arithmético-géométriques****Définition 14**

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de réels est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

**Proposition 15**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \quad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

Soit  $\ell$  le (seul) réel vérifiant  $\ell = a\ell + b$ , autrement dit :  $\ell = \frac{b}{1-a}$ .

Alors, la suite  $(u_n - \ell)_{n \geq 0}$  est géométrique de raison  $a$ . On en déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$ .

## 4 Sommes et produits

### Définition 16

### Notations Sigma et Pi

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et soient  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$  des réels indexés par des entiers consécutifs.

La somme  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  et le produit  $P = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$  se notent mathématiquement :

$$S = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad P = \prod_{k=0}^n u_k$$

### Remarques :

**R1** – La lettre  $k$  qui indexe la somme (ou le produit) peut en réalité être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée!). On dit que c'est une **lettre muette**. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=0}^n u_j$$

**R2** – Dans l'indexation des termes, les indices sont toujours une suite consécutifs d'entiers dans l'ordre strictement croissant. Par exemple :

$$\sum_{k=4}^6 \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}, \quad \prod_{k=1}^4 k^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 4^2$$

**R3** – Par défaut, si l'ordre des bornes est dans le mauvais sens, la somme (ou le produit) est vide. Par convention, une somme vide vaut 0, un produit vide vaut 1.

**R4** – Dans la somme  $\sum_{k=0}^n u_k$  (ou dans le produit  $\prod_{k=0}^n u_k$ ), il y a  $n+1$  termes.

Plus généralement, dans la somme  $\sum_{k=p}^n u_k$  (ou dans le produit  $\prod_{k=p}^n u_k$ ), il y a  $n-p+1$  termes.

**R5** – **Relations de Chasles.**

On peut séparer une somme (ou un produit) en deux parties s'il contient au moins deux termes. Soit  $n \geq 1$  et soit  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On a :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n a_k = \left( \prod_{k=0}^p a_k \right) \times \left( \prod_{k=p+1}^n a_k \right)$$

On peut ajouter des termes supplémentaires à une somme si on les retranche également.

On peut multiplier un produit par des termes supplémentaires non nuls si on le divise également.

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^n a_k = \frac{\prod_{k=0}^n a_k}{\prod_{k=0}^{p-1} a_k}$$

**Proposition 17***Propriétés des sommes et produits*

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et soient  $u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n$  des réels. Alors

•

$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\prod_{k=0}^n (u_k v_k) = \left( \prod_{k=0}^n u_k \right) \left( \prod_{k=0}^n v_k \right)$$

• Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^n u_k$$

$$\prod_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^n u_k$$

**Remarques :**

**R1** – Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \quad \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

Plus généralement, dans la somme  $\sum_{k=p}^n 1$ , on compte simplement le nombre de termes de la somme.

**R2** – Parfois certaines sommes peuvent se simplifier en dominos : ce sont des **sommes télescopiques** : c'est le cas lorsque le terme dans la somme est de la forme  $v_k - v_{k+1}$  (ou  $v_{k+1} - v_k$ ) :

$$\sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

**R3** – De même, certains produits peuvent se simplifier en dominos : ce sont des **produits télescopiques** : c'est le cas lorsque le terme dans le produit est de la forme  $\frac{v_k}{v_{k+1}}$  (ou  $\frac{v_{k+1}}{v_k}$ ) :

$$\prod_{k=0}^n \left( \frac{v_k}{v_{k+1}} \right) = \frac{v_0}{v_{n+1}}$$

$$\prod_{k=0}^n \left( \frac{v_{k+1}}{v_k} \right) = \frac{v_{n+1}}{v_0}$$

**Remarque :**

Lorsqu'on a une somme  $\sum_{k=p}^n a_k$ , on peut réaliser pour convenance deux types de **changements d'indice** :

- un changement par décalage d'indice : on pose  $\ell = k + j \iff k = \ell - j$  où  $k$  est un entier fixé.
- un changement où on inverse l'ordre d'énumération : on pose  $\ell = n - k \iff k = n - \ell$ .

Après un changement d'indice, le nombre de termes dans la somme doit rester inchangé !

**Exemples :**

$$\mathbf{E1} - \sum_{k=2}^p \frac{1}{k-1} = \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

$$\mathbf{E2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell}$$

## 5 Notation factorielle

### Définition 18

### Factorielle d'un entier naturel

Pour tout  $n$  entier tel que  $n \geq 1$ , on définit le nombre **factorielle**  $n$  par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^n k$$

et par convention, on pose :  $0! = 1$

### Exemples :

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \times 1 = 2, \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

### Proposition 19

### Formule de récurrence des factorielles

Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$n! = n \times (n-1)!$$

### Remarques :

**R1** – La formule précédente n'est pas vraie pour  $n = 0$ . On peut réécrire :  $\forall n \geq 0, (n+1)! = (n+1) \times n!$

**R2** – Plus généralement, on peut réécrire un produit d'entiers consécutifs avec des factorielles.

Si  $p$  et  $n$  sont deux entiers naturels tels que  $p \leq n$ , alors :

$$p \times (p+1) \times \cdots \times (n-1) \times n = \frac{n!}{(p-1)!}$$

### Proposition 20

### Produit d'entiers pairs/impairs

Soit  $n \geq 0$ . Alors :

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times n!$$

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$



## 7 Sommes classiques

### Théorème 24

### Somme des entiers, des carrés, des cubes

Soit  $n$  un entier naturel. On a :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

### Remarque :

Ces sommes sont valables également lorsque l'indice  $k$  commence à 1, puisque le terme pour  $k = 0$  est nul.

### Théorème 25

### Somme des puissances

Soit  $n$  un entier naturel et soit  $q$  un réel différent de 1. Alors :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

et plus généralement :

$$\sum_{k=p}^n q^k = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

### Remarque :

Si  $q = 1$ , la formule précédente n'a pas de sens (on ne peut pas diviser par  $1 - q$  dans ce cas !). On peut résumer

tous les cas avec une accolade :  $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ .

### Théorème 26

### Identité remarquable $a^n - b^n$

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $n$  un entier strictement positif. Alors

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Autrement dit :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

### Remarques :

**R1** – Cette formule généralise l'identité remarquable  $a^2 - b^2$  que l'on connaît déjà bien :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

**R2** – La somme est symétrique en  $a$  et  $b$ . Dans cette somme, chaque terme est le produit de  $n - 1$  facteurs.

**Théorème 27****Formule du Binôme de Newton**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $n$  un entier. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**Remarques :**

**R1** – La formule est symétrique en  $a$  et  $b$ . Dans la somme, chaque terme est le produit de  $n$  facteurs.

**R2** – Cette formule généralise l'identité remarquable  $(a + b)^2$  que l'on connaît déjà bien :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

**Exemples :**

**E1** – Pour tout réel  $x$  quelconque, on a donc en particulier :  $(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

**E2** – On a plus spécifiquement (pour  $x = 1$  et  $x = -1$ ) :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

## 8 Sommes doubles

**Définition 28****Somme double**

Soit  $(a_{i,j})$  une suite indexée par deux indices  $i$  et  $j$ . On appelle **somme double** toute somme du type :

$$\sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=m}^n a_{i,j} = \sum_{i=k}^{\ell} \left( \sum_{j=m}^n a_{i,j} \right)$$

**Remarques :**

**R1** – On peut aussi noter la somme précédente :  $\sum_{\substack{k \leq i \leq \ell \\ m \leq j \leq n}} a_{i,j}$  ou encore  $\sum_{(i,j) \in \llbracket k, \ell \rrbracket \times \llbracket m, n \rrbracket} a_{i,j}$ .

**R2** – Si les bornes dans les deux sommes sont identiques, (les deux indices sont indépendants l'un de l'autre), on peut utiliser une notation plus condensée, et donc intervertir les deux sommes sans se poser de questions :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

**R3** – Le deuxième indice peut dépendre du premier (mais jamais l'inverse!!). Si on veut intervertir les sommes, il faut faire attention à l'ordre des indices (le premier ne devant jamais dépendre du deuxième). Le plus simple est de transiter par la forme concise :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$