1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.
Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

On calcule les premiers termes :

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = \frac{1}{2}, \qquad u_3 = \frac{2}{3}, \qquad u_4 = \frac{3}{4}$$

On peut donc conjecturer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on aurait peut-être $u_k = \dfrac{k-1}{k}$.

Notons, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ ».

- D'après la première valeur de la suite, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.
  Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \overset{HR}{=} \frac{1}{2-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{2n-(n-1)}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$
  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence : $\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 2, \qquad u_2 = 3, \qquad u_3 = 4$$

On peut donc conjecturer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on aurait peut-être $u_k = k + 1$.

Notons, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n + 1$ ».

- D'après la première valeur de la suite, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n = n + 1$.
  Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $u_{n+1} = n + 2$.

  $$u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8 \overset{HR}{=} 10(n+1) - 9n - 8 = n + 2$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence : $\forall n \geqslant 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n$.
Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_2 = 3, \qquad u_3 = 7, \qquad u_4 = 15, \qquad u_5 = 31$$

On peut donc conjecturer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on aurait peut-être $u_k = 2^k - 1$.

Notons, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ ».

- D'après la première valeur de la suite, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n = 2^n - 1$.
  Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

  $$u_{n+1} = u_n + 2^n \overset{HR}{=} (2^n - 1) + 2^n = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence : $\forall n \geqslant 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

4 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{n}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. La suite (u_n) est-elle majorée ?
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n+2 \leqslant 2^n$. La suite (u_n) est-elle minorée ?

1. Montrons l'égalité par récurrence.
   Notons, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$ ».
   - On sait que $u_0 = 0$ et par ailleurs $2 - \dfrac{0+2}{2^0} = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.
     Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $u_{n+1} = 2 - \dfrac{n+3}{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{HR}{=} \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-(n+2)}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2(n+2)+(n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

     Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence : $\forall n \geqslant 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

   Finalement, avec le résultat précédent, on voit donc que :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant 2$$

   Ainsi, la suite (u_n) est majorée (par 2).
2. De même, montrons l'inégalité proposée par récurrence.
   Notons, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{Q}(n)$: « $n+2 \leqslant 2^n$ ».
   - Pour $n = 2$, $\mathcal{Q}(2)$: « $4 \leqslant 2^2$ » est clairement vraie.
   - Soit $n \geqslant 2$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{Q}(n)$ vraie, i.e. $n+2 \leqslant 2^n$.
     Montrons qu'alors $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $n+3 \leqslant 2^{n+1}$.

$$n+3 = (n+2)+1 \overset{HR}{\leqslant} 2^n + 1 \leqslant 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

     Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{Q}(n)$ est vraie.

   Avec le résultat précédent, on a donc montré que :

$$\forall n \geqslant 2,\ n+2 \leqslant 2^n \iff \frac{n+2}{2^n} \leqslant 1 \iff -\frac{n+2}{2^n} \geqslant -1 \iff 2 - \frac{n+2}{2^n} \geqslant 1 \iff u_n \geqslant 1$$

   Finalement, la suite (u_n) est minorée par 1 à partir du rang 2. Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ la suite est bien minorée (par 0).

5 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4,\ u_1 = 8,\quad$ et $\quad\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$.

On raisonne avec une récurrence double.
Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$ ».

- $n = 0$. On a $u_0 = 4$, et $2 \times (-1)^0 + 2 \times 5^0 = 4$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  $n = 1$. On a $u_1 = 8$, et $2 \times (-1)^1 + 2 \times 5^1 = -2 + 10 = 8$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour cet entier n : on a $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$ et $u_{n+1} = 2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 5^{n+1}$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également, c'est-à-dire montrons que $u_{n+2} = 2 \times (-1)^{n+2} + 2 \times 5^{n+2}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 4u_{n+1} + 5u_n \\
&\overset{HR}{=} 4\left(2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 5^{n+1}\right) + 5\left(2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n\right) \\
&= 8 \times (-1)^{n+1} + 8 \times 5^{n+1} + 10 \times (-1)^n + 2 \times 5^{n+1} \\
&= (10 - 8) \times (-1)^n + (8 + 2) \times 5^{n+1} \\
&= 2 \times (-1)^{n+2} + 2 \times 5^{n+2}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

6 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4,\ u_1 = \dfrac{7}{3}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{7}{6}u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

On raisonne avec une récurrence double.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ ».

- $n = 0$. On a $u_0 = 4$, et $\dfrac{1}{2^{-1}} + \dfrac{2^1}{3^0} = 2 + 2 = 4$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  $n = 1$. On a $u_1 = 7/3$, et $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{2^{1+1}}{3^1} = 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour cet entier n : on a $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2^{n+2}}{3^{n+1}}$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également, c'est-à-dire montrons que $u_{n+2} = \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{2^{n+3}}{3^{n+2}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \\
&\overset{HR}{=} \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n}\right) \\
&= \frac{7}{3} \times \frac{1}{2^{n+1}} + 7 \times \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\
&= \left(\frac{7}{3 \times 4} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2^{n-1}} + \left(\frac{7}{3} - 1\right)\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{4}{3} \times \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

7 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $n \leqslant u_n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.

1. On raisonne avec une récurrence double.
   Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $n \leqslant u_n$ ».
   - $0 \leqslant 1 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
     $1 \leqslant 1 = u_1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour cet entier n : on a $n \leqslant u_n$ et $n+1 \leqslant u_{n+1}$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également, c'est-à-dire montrons que $n+2 \leqslant u_{n+2}$.
     $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geqslant (n+1) + (n) \geqslant n+1+1 = n+2$$
     Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Ici encore, faisons une récurrence double. Notons pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ ».
   - $u_1 = 1 < \dfrac{7}{4}$, donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
     $u_2 = 2 < \left(\dfrac{7}{4}\right)^2$, donc $\mathcal{Q}(2)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons que les propriétés $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ soient vraies pour cet entier n : on a $u_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ et $u_{n+1} < \left(\dfrac{7}{4}\right)^{n+1}$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également, c'est-à-dire montrons que $u_{n+2} < \left(\dfrac{7}{4}\right)^{n+2}$.
     $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4} + 1\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$$
     Ainsi, $\mathcal{Q}(n+2)$ est vraie.
   - Par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{Q}(n)$ est vraie.

8 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2, u_1 = -1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \dfrac{u_n}{n+2}$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 5 - 3\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

On raisonne avec une récurrence double.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 5 - 3\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ ».

- On a $u_0 = 2$, et $5 - 3 \times \dfrac{1}{0!} = 5 - 3 = 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  On a $u_1 = -1$, et $5 - 3\left(\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!}\right) = 5 - 3 \times 2 = -1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour cet entier n : on a $u_n = 5 - 3\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ et $u_{n+1} = 5 - 3\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également, c'est-à-dire montrons que $u_{n+2} = 5 - 3\displaystyle\sum_{i=0}^{n+2} \frac{1}{i!}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \frac{u_n}{n+2} \\
&\overset{HR}{=} \frac{n+3}{n+2}\left(5 - 3\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!}\right) - \frac{1}{n+2}\left(5 - 3\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right) \\
&= 5\left(\frac{n+3}{n+2} - \frac{1}{n+2}\right) - 3\left(\frac{n+3}{n+2}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!} - \frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right) \\
&= 5 \times \frac{n+2}{n+2} - 3\left(\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!} - \frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right) \\
&= 5 - 3\left(\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!} + \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right)\right) \\
&= 5 - 3\left(\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!} + \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= 5 - 3\sum_{i=0}^{n+2}\frac{1}{i!}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

$\boxed{\textbf{9}}$ Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant n!$.

On raisonne avec une récurrence forte.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant n!$ ».

- On a $u_0 = 1 \leqslant 0! = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour cet entier n, on ait : $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ qui soient vraies. On a donc par hypothèse :

  $$u_0 \leqslant 0!, \quad u_1 \leqslant 1!, \quad \ldots, \quad u_n \leqslant n!$$

  Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  On a :

  $$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} k!$$

  Mais, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $k! \leqslant n!$, on a donc :

  $$u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

10 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5^n \geqslant 2^n + 3^n$.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) \ : \text{« } 5^n \geqslant 2^n + 3^n \text{ »}$$

- Pour $n = 1$, on a bien $5 \geqslant 2 + 3$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $5^n \geqslant 2^n + 3^n$.
  Montrons qu'alors on a $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, i.e. montrons que $5^{n+1} \geqslant 2^{n+1} + 3^{n+1}$.

  $$5^{n+1} = 5 \times 5^n \overset{HR}{\geqslant} 5(2^n + 3^n) = 5 \times 2^n + 5 \times 3^n \geqslant 2 \times 2^n + 3 \times 3^n = 2^{n+1} + 3^{n+1}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence , $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

11 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) \ : « \ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \ »$$

- Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

  Montrons qu'alors on a $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, i.e. montrons que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \overset{HR}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque : on peut aussi démontrer le résultat sans récurrence, on calculant directement la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

12 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \geqslant n+1$.

Notons, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant n+1$ ».

- Pour $n=0$, $2^0 \geqslant 0+1$ est bien vraie, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $2^n \geqslant n+1$.
  Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $2^{n+1} \geqslant n+2$.
  $$2^{n+1} = 2 \times 2^n \overset{HR}{\geqslant} 2 \times (n+1) = 2n+2 \geqslant n+2$$
  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence : $\forall n \geqslant 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

13 Soit $n \geqslant 5$. Compléter les trous dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=3}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=\bullet}^{\bullet} u_k, \qquad \sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{\bullet} u_\bullet, \qquad \sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=\bullet}^{n} u_\bullet$$

$$\sum_{k=3}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=5}^{n+2} u_k$$

$$\sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-4} u_{k+3}$$

$$\sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} u_{k+3}$$

14 Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k), \qquad \sum_{k=p-3}^{q-1}(u_{k+1}-u_{k-1})$$

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k) = u_{q+1}-u_p$$

$$\sum_{k=p-3}^{q-1}(u_{k+1}-u_{k-1}) = u_q + u_{q-1} - u_{p-3} - u_{p-4}$$

15 Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

16 Calculer les sommes et produits suivants pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 1$
4. $\displaystyle\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$
5. $\displaystyle\prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1}$
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$
3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 1 = (2n) - (n) + 1 = n+1$
4. $\displaystyle\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1} = \frac{5}{46}$
5. $\displaystyle\prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{159}{57}$
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$

17 Calculer les sommes et produits suivants pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(x^{2\times 3^k} + x^{3^k} + 1\right)$

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)-1)k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}} = 2^{1-\frac{1}{n+1}}.$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(x^{2\times 3^k} + x^{3^k} + 1\right) = \prod_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2} (x^{3^k})^j\right).$
   Si $x \neq 1$, on a :
   $$\prod_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2} (x^{3^k})^j\right) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1-(x^{3^k})^3}{1-x^{3^k}} = \prod_{k=0}^{n} \frac{1-x^{3^{k+1}}}{1-x^{3^k}} = \frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x}$$
   Si $x = 1$, on a :
   $$\prod_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2} (x^{3^k})^j\right) = \prod_{k=0}^{n} 3 = 3^{n+1}$$

18 Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$$

Avec un changement d'indice $j = n+1-k$ dans la deuxième somme, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=0$$

$\boxed{\textbf{19}}$ Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall t > 1, \qquad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}$$

En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

Cherchons α et β tels que :

$$\begin{aligned}
&\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1} \\
\Longleftrightarrow &\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha(t+1)+\beta(t-1)}{(t-1)(t+1)} \\
\Longleftrightarrow &\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha(t+1)+\beta(t-1)}{(t-1)(t+1)} \\
\Longleftrightarrow &\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{(\alpha+\beta)t+(\alpha-\beta)}{t^2-1}
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre α et β vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta=-\alpha \\ 2\alpha=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\forall t > 1, \; \frac{1}{t^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

20 Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Démontrons le résultat par récurrence. Notons pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathcal{P}(n)\ : \text{« } \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ ».}$$

- Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^{1-1}}{1} + \frac{(-1)^{2-1}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
  Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$.
  La propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc bien vérifiée.
- Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée pour cet entier n, c'est-à-dire, on a « $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ ».
  Montrons qu'alors on a également $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire « $\displaystyle\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$ ».

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&\overset{HR}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{\substack{\ell=0 \\ k=\ell+1}}^{n-1} \frac{1}{n+\ell+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+\ell} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+\ell} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+\ell} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+(n+1)} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+\ell}
\end{aligned}$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.
- Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

21 Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Démontrons le résultat par récurrence.
Notons pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathcal{P}(n)\ : \text{«}\ \prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) >$$

- Pour $n=1$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}(1+k) = 2$ et $2^1 \prod_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 = 2$. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc bien vérifiée.
- Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée pour cet entier n, c'est-à-dire, on a « $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ ».

  Montrons qu'alors on a également $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire « $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k) = 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)$ ».

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k) &= \prod_{\ell=2}^{n+2}(n+\ell) \quad \text{(on pose } \ell = k+1\text{)}\\
&= \left(\prod_{\ell=1}^{n}(n+\ell)\right) \times \frac{(n+(n+1))(n+(n+2))}{n+1}\\
&\overset{HR}{=} \left(2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right) \times \frac{(2n+1)\times 2(n+1)}{n+1}\\
&= \left(2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right) \times 2 \times (2(n+1)-1)\\
&= 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)
\end{aligned}$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.
- Par récurrence, on a donc que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

22 En utilisant les relations de Chasles, calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n), \qquad \sum_{k=0}^{2n} \max(k,n)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n \times n \\
&= \frac{3n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \max(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \max(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k \\
&= n \times (n+1) + \left(\sum_{k=0}^{2n} k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) \\
&= n(n+1) + \frac{(2n)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{5n^2+3n}{2}
\end{aligned}$$

23 Calculer les sommes suivantes pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}2^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}5^{-k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{n+k}}{2^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^{2k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}(-1)^k3^{k-1}$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
13. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2+4^{n+k}}{2^k}$
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2-2k)$
15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^kk^2$
16. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^k$
17. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}2^k$
18. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}3^{k-1}2^{n-k}$
19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}(-1)^k3^{k+1}$
20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n+1}{k}2^k$
21. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$
22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k2^{k-1}.$
23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k}.$

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}=\frac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}2^k=2^2\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=4(2^{n-1}-1)=2^{n+1}-4.$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}5^{-k}=\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{5}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}\right).$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}=-4\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{-1}{8}\right)^k=-4\left(-\frac{1}{8}\right)^2\frac{1-\left(\frac{-1}{8}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{-1}{18}\left(1-\left(\frac{-1}{8}\right)^{n-1}\right).$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=2\times\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{n+k}}{2^k}=3^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k=3^n\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}=-2\times3^n\times\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}-1$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\binom{n}{n+1}-\binom{n}{0}=2^n+0-1=2^n-1$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^{2k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^{2(k+1)}=4\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}4^k=4\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k-\binom{n}{n}4^n\right)=4(5^n-4^n)$

11. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}(-1)^k3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}3^{k-2}=\frac{-1}{9}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}(-3)^k\\ &=\frac{-1}{9}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k-\binom{n}{0}+\binom{n}{n+1}(-3)^{n+1}\right)=\frac{-1}{9}\left((-2)^n-1\right)\end{aligned}$$

12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1+1)^n=0^n=\begin{cases}0 & \text{si } n\geqslant 1\\ 1 & \text{si } n=0\end{cases}$

13. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2+4^{n+k}}{2^k}=2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+4^n\sum_{k=2}^{n}2^k=2\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}+4^n.2^2\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+4^{n+1}\left(2^{n-1}-1\right)$

14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2-2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-2\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3n^2-5n-4)}{12}$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^kk^2=\sum_{j=1}^{n}(2j)^2-\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2=4\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}(4j^2-4j+1)=4\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}1=2n(n+1)-n=n(2n+1)$

16. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^k=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}3^k=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}3^k=n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}3^{j+1}=3n(3+1)^{n-1}=3n4^{n-1}$

17. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}2^k\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}2^k=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}2^k=n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}2^{j+2}=4n(n-1)3^{n-2}$

18. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}3^{k-1}2^{n-k}=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}3^{j-2}2^{n-j+1}=\frac{2}{9}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}3^j2^{n-j}-2^n\right)=\frac{2}{9}\left(5^n-2^n\right)$

19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}(-1)^k3^{k+1}=3\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(-3)^{j+1}=-9\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-3)^j-(-3)^n\right)=-9\left((-2)^n-(-3)^n\right)$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n+1}{k}2^k=\sum_{k=1}^{n}(n+1)\binom{n}{k-1}2^k=(n+1)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}2^{j+1}=2(n+1)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j-2^n\right)=2(n+1)(3^n-2^n)$

21. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k2^{k-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k-\binom{2n}{0}(-2)^0\right)=\frac{1}{2}\left((-1)^{2n}-1\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0.$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k}=\frac{3}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k}-\binom{n}{0}2^03^n\right)=\frac{3}{2}\left(5^n-3^n\right).$

$\boxed{\mathbf{24}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k > p$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

En déduire que pour $n \geqslant p$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Application : Calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3)$.

La première formule découle directement de la formule de Pascal :

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$$

donc :

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

On en déduit que pour tous entiers tels que $n \geqslant p$, en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Application :

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3) &= \sum_{k=4}^{20} \frac{k!}{(k-4)!} \\ &= 4! \sum_{k=4}^{20} \frac{k!}{4!(k-4)!} \\ &= 24 \sum_{k=4}^{20} \binom{k}{4} \\ &= 24 \binom{21}{5} \end{aligned}$$

25 Soient n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Montrer que pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant p$, on a : $\dbinom{n}{j}\dbinom{n-j}{p-j} = \dbinom{n}{p}\dbinom{p}{j}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j}$

Pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $0 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(p-j)!(n-p)!} = \frac{n!}{j!(p-j)!(n-p)!}$$

et par ailleurs :

$$\binom{n}{p}\binom{p}{j} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{n!}{(n-p)!j!(p-j)!}$$

On a donc bien égalité :

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p}\binom{p}{j}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{p}{j} \\
&= \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j} \\
&= \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \\
&= \binom{n}{p} 2^p
\end{aligned}$$

26 Calculer les sommes doubles suivantes pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} 2^{2i-j}$.
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$.
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.
4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i$.
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$.
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

1.

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} 2^{2i-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = \left(\sum_{i=0}^{n} 4^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)$$
$$= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

2.

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \max(i,i)$$
$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i = 2\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= 2\left(\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j\right)\right) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=2}^{n}(j-1)j + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= 2 \times \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

5.

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{i=1}^{n} i(n-i) + \sum_{j-1}^{n} j(j-1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(k(n-k)+k(k-1)) = \sum_{k=1}^{n}(n-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n^2+3n}{4}$

27 Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k$, puis calculer cette somme.

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} 2^k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(2^k \sum_{j=1}^{k} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \times k$$

L'égalité est bien vérifiée.
Cependant, on peut calculer la somme double d'une autre manière :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} 2^k \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1 - 2^{n-j+1}}{1-2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j (2^{n-j+1} - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (2^{n+1} - 2^j) \\
&= n2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j \\
&= n2^{n+1} - 2 \times \frac{1 - 2^n}{1-2} \\
&= n2^{n+1} - 2(2^n - 1)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

28 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad v_n = b_{n+1} - b_n$$

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = u_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k$.
2. Application : calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

1. Remarquons que :

$$a_0 = u_0$$

et

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-1} = u_n - u_{n-1}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k-1}) b_k \quad \text{(en convenant que } u_{-1} = 0\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k b_k - \sum_{k=0}^{n} u_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k b_{k+1} \\
&= u_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k (b_k - b_{k+1}) \\
&= u_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k
\end{aligned}$$

2. En notant $a_k = 2^k$ et $b_k = k$, on a alors :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1, \qquad \text{et} \qquad v_n = b_{n+1} - b_n = (n+1) - n = 1$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k k = (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

29 Montrer que pour $N \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$.

On fait simplement une permutation des deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} &= \sum_{0 \leqslant n < k \leqslant N} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^k}{k^2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{(-1)^k}{k^2} \times k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}
\end{aligned}$$

30 On note pour $n \geqslant 2$: $V = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$, $W = \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} ij$, $X = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$, $Y = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij$, $Z = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.
Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y.
Montrer, sans calcul, que $X = Y$. En déduire X puis Z.

$$V = \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} ij \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(i^n \prod_{j=1}^{n} j \right) = \prod_{i=1}^{n} (n! i^n) = (n!)^n \prod_{i=1}^{n} i^n = (n!)^n \times (n!)^n = (n!)^{2n}$$

$$W = \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} ij = \frac{\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij}{\prod_{i=1}^{n} i^2} = \frac{V}{(n!)^2} = \frac{(n!)^{2n}}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}$$

On a :

$$W = \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} ij = \frac{\left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij \right) \times \left(\prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij \right)}{\left(\prod_{i=1}^{n} i^2 \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n} i^2 \right)} = \frac{XY}{(n!)^2 \times (n!)^2} = \frac{XY}{(n!)^4}$$

Par symétrie des indices, $X = Y$, donc :

$$X^2 = (n!)^4 W = (n!)^4 (n!)^{2n-2} = (n!)^{2n+2}$$

D'où :

$$X = (n!)^{n+1}$$

Et enfin,

$$Z = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij = \frac{\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij}{\prod_{i=1}^{n} i^2} = \frac{X}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$$

31 On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$

1. Montrer par récurrence sur n que u_n existe et $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n-2}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.

1. Notons pour tout $n \geqslant 0$,$\mathcal{P}(n) : 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   - La propriété est vraie pour n = 0 car $u_0 = 1$.
   - Soit un entier n. Si on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie. Comme $u_n < 4$, u_{n+1} existe et par opérations on a: $\frac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{4}{2}$.
   - La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier n.
2. (a) $v_{n+1} = \frac{4-u_n}{4-2(4-u_n)} = \frac{4-u_n}{2(u_n-2)}$ donc $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{2}$
   (b) On a d'après le cours $v_n = v_0 + n \times \frac{-1}{2} = -1 + \frac{-n}{2}$ ainsi $u_n = \frac{2}{-2-n} + 2 = \frac{2+2n}{n+2}$

32 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4-u_n}$.

1. Montrer par récurrence sur n que u_n existe et $1 < u_n < 3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-3}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.

1. Notons pour tout $n \geqslant 0$,$\mathcal{P}(n) : 1 < u_n < 3$.
   - La propriété est vraie pour n = 0 car $u_0 = 2$.
   - Soit un entier n. Si on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie. Comme $u_n < 4$, u_{n+1} existe et par opérations on a: $\frac{3}{3} < u_{n+1} < 3$.
   - La propriété est donc vraie pour tout entier n.
2. (a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-3} = \frac{u_n-1}{3(u_n-3)}$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$

   (b) On a d'après le cours $v_n = v_0 \times (\frac{1}{3})^n = -1 \times (\frac{1}{3})^n$ ainsi $u_n = \frac{-3v_n+1}{1-v_n} = \frac{-(\frac{1}{3})^{n-1}+1}{1+(\frac{1}{3})^n}$

33 Calculer le terme général des suites (u_n) suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 4$.
2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3v_n + 4$.
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1. La suite est arithmético-géométrique, d'équation caractéristique associée $x = -2x + 4 \iff x = \frac{4}{3}$.
   La suite $\left(u_n - \frac{4}{3}\right)_{n \geqslant 0}$ est donc géométrique de raison -2. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \frac{4}{3} = (-2)^n \left(u_0 - \frac{4}{3}\right)$, ainsi :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4}{3} - \frac{(-2)^n}{3}}$$
2. La suite est arithmético-géométrique, d'équation caractéristique associée $x = 3x + 4 \iff x = -2$.
   La suite $(u_n + 2)_{n \geqslant 0}$ est donc géométrique de raison 3. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 2 = 3^n (u_0 + 2)$, ainsi :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 \times 3^n - 2}$$
3. Par une récurrence rapide, on voit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.
   Posons alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.
   On a $v_0 = \ln(u_0) = \ln(1) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{2u_n}) = \frac{1}{2}\ln(2u_n) + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}v_n$$
   La suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est donc arithmético-géométrique, d'équation associée $x = \frac{1}{2}x + \frac{\ln(2)}{2} \iff x = \ln(2)$.
   La suite $(v_n - \ln(2))$ est donc géométrique de raison $1/2$, donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - \ln(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - \ln(2)) \Longrightarrow v_n = \ln(2) - \frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(2)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
   et on en déduit que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp(v_n) = \exp\left(\ln(2)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) = \boxed{2^{1 - \frac{1}{2^n}}}$$

34 On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.
2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}-1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}.$$

(c) Calculer finalement la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$ en fonction de n.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n - n$ ».
   - Initialisation.
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $2^0 - 0 = 1 - 0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
   - Hérédité.
     Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n = 2^n - n$.
     Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$.

$$u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \overset{HR}{=} 2(2^n - n) + n - 1 = 2^{n+1} - 2n + n - 1 = 2^{n+1} - (n+1)$$

     Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.
   - Conclusion. Par récurrence, on a bien que :$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}-1}{2^n} = \frac{(2u_n + n - 1) - 1}{2^n} = \frac{2(u_n - 1) + n}{2^n} = \boxed{\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}}$$

(b) On a pour $n \geqslant 1$, en reconnaissant une somme télescopique.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}-1}{2^k} - \frac{u_k - 1}{2^{k-1}} \right) = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} - \frac{u_0 - 1}{2^{-1}} = \boxed{\frac{u_n - 1}{2^{n-1}}}$$

(c) On en déduit finalement, d'après 1 et 2(b) que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} = \boxed{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}}$$

35 On souhaite montrer que pour tous entiers p, n tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$:

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n-1}{p}$$

1. Démontrer la formule en utilisant plusieurs fois la relation de Pascal : $\binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1}$.
2. Démontrer la formule par récurrence sur n.
3. Démontrer la formule par récurrence sur p.
   (Rappel : par convention, on pose que si $p \geqslant n$, $\binom{n-1}{p} = 0$).

1. Soient n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$. On a :

$$\begin{aligned}
(-1)^p\binom{n-1}{p} &= (-1)^p\left(\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1}\right)\\
&= (-1)^p\binom{n}{p} + (-1)^{p-1}\binom{n-1}{p-1}\\
&= (-1)^p\binom{n}{p} + (-1)^{p-1}\left(\binom{n}{p-1} - \binom{n-1}{p-2}\right)\\
&= (-1)^p\binom{n}{p} + (-1)^{p-1}\binom{n}{p-1} + (-1)^{p-2}\binom{n-1}{p-2}\\
&= (-1)^p\binom{n}{p} + (-1)^{p-1}\binom{n}{p-1} + (-1)^{p-2}\left(\binom{n}{p-2} - \binom{n-1}{p-3}\right)\\
&= (-1)^p\binom{n}{p} + (-1)^{p-1}\binom{n}{p-1} + (-1)^{p-2}\binom{n}{p-2} + (-1)^{p-3}\binom{n}{p-3}\\
&= \vdots \qquad\qquad \text{(on réitère le raisonnement } p \text{ fois)}\\
&= (-1)^p\binom{n}{p} + (-1)^{p-1}\binom{n}{p-1} + \cdots + (-1)^0\binom{n}{0}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

2. Notons pour tout entier $n \geqslant 1$: $\mathcal{P}(n)$: « $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n-1}{p}$ ».

   - Pour $n = 1$, (et $p = 0$), on a bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^0\binom{1}{0} = 1 = (-1)^0\binom{0}{0}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
     Montrons qu'alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. que :

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n+1}{k} = (-1)^p\binom{n}{p}$$

On a en utilisant la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}
\forall p \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) \qquad \text{(en convenant que } \binom{n}{0}=0\text{))}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{n}{k-1}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k}\binom{n}{k}\\
&= (-1)^p\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. Posons pour tout $p \geqslant 0$, on pose $\mathcal{Q}(p)$: « $\forall n \geqslant p+1, \ \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n-1}{p}$ »

- Pour $p = 0$, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \ (-1)^p\binom{n}{0} = 1 = (-1)^0\binom{n-1}{0}$$

donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

- Soit $p \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{Q}(p)$ vraie et montrons que $\mathcal{Q}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que :

$$\forall n \geqslant p+2, \ \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^{p+1}\binom{n-1}{p+1}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant p+2, \ \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}+(-1)^{p+1}\binom{n}{p+1}\\
&= (-1)^p\binom{n-1}{p}+(-1)^{p+1}\binom{n}{p+1}\\
&= (-1)^{p+1}\left(\binom{n}{p+1}-\binom{n-1}{p}\right)\\
&= (-1)^{p+1}\binom{n-1}{p+1}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathcal{Q}(p+1)$ vraie.

- Ainsi, par récurrence, $\forall p \geqslant 0$, $\mathcal{Q}(p)$ est vraie.

36 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = n2^{n-1}$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$$
3. Rappeler la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

1. Raisonnons par récurrence.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $a_n = n2^{n-1}$ ».
   - Pour $n = 0$, on sait que $a_0 = 0$ et $0 \times 2^{-1} = 0$ aussi, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. « $a_n = n2^{n-1}$ ».
   Montrons qu'alors on a $\mathcal{P}(n+1)$ vraie aussi, i.e. « $a_{n+1} = (n+1)2^n$ ».
   $$a_{n+1} = 2a_n + 2^n \overset{HR}{=} 2\left(n2^{n-1}\right) + 2^n = 2^n n + 2^n = (n+1)2^n$$
   donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.
   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}$.
2. On reconnaît une somme télescopique ! On a donc :
$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - 0 = a_{n+1}$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.
4. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} = (n+1)2^n$$
mais également :
$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n}(a_k + 2^k) = \sum_{k=0}^{n}(k2^{k-1} + 2^k) = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} + (2^{n+1} - 1)$$
On en déduit par égalité que :
$$(n+1)2^n = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} + 2^{n+1} - 1$$
autrement dit :
$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1-2)2^n + 1 = \boxed{(n-1)2^n + 1}$$

37

1. Soit p un entier fixé, tel que $p \geqslant 1$. Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant p, \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $k^4 = 24\binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k$.
3. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\sum_{k=2}^{n} k$, $\sum_{k=2}^{n} k^2$ et $\sum_{k=2}^{n} k^3$.
4. Montrer pour $n \geqslant 2$, on a :
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k+2}{4} = \binom{n+3}{5}$$
5. En déduire que pour $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} - 1$$

1. Procédons par récurrence comme indiqué dans l'énoncé.
Notons :
$$\forall n \geqslant p,\ \mathcal{P}(n) \ : \text{« } \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \text{ »}$$
   - Pour $n = p$, on a :
$$\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$$
   et par ailleurs :
$$\binom{p+1}{p+1} = 1 \text{ aussi}$$
   donc $\mathcal{P}(p)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant p$ fixé. Supposons que pour cet entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, i.e. que « $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ».
   Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi, c'est-à-dire que :
$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$
   On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &\overset{HR}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \quad \text{d'après la formule de Pascal}\end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.

- Finalement, par récurrence, on a bien que : $\forall n \geqslant p$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Soit $k \geqslant 2$. On a :

$$\binom{k+2}{4} = \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)}{24}$$

Ainsi :

$$24\binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k = (k+2)(k+1)k(k-1) - 2k^3 + k^2 + 2k = (k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k) - 2k^3 + k^2 + 2k = k^4$$

On a donc bien que :

$$\boxed{k^4 = 24\binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k}$$

3. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

et

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

et

$$\sum_{k=2}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - 1^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$$

4. Soit $n \geqslant 2$. Avec un changement d'indice $j = k+2$, puis en appliquant la formule démontrée dans la question 1, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k+2}{4} = \sum_{j=4}^{n+2} \binom{j}{4} = \binom{(n+2)+1}{4+1} = \binom{n+3}{5}$$

5. Finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k^4 &= \sum_{k=2}^{n} \left(24\binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k\right) \\
&= 24\sum_{k=2}^{n} \binom{k+2}{4} - 2\sum_{k=2}^{n} k^3 + \sum_{k=2}^{n} k^2 + 2\sum_{k=2}^{n} 2k \\
&= 24\binom{n+3}{5} - 2\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1\right) + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) + 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5} - \frac{n^2(n+1)^2}{2} + 2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + n(n+1) - 2 \\
&= n(n+1)\left[\frac{(n+3)(n+2)(n-1)}{5} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{6} + 1\right] - 1 \\
&= n(n+1)\left[\frac{6(n^3 + 4n^2 + n - 6) - 15(n^2 + n) + 5(2n+1) + 30}{30}\right] - 1 \\
&= \boxed{n(n+1)\frac{6n^3 + 9n^2 + n - 1}{30} - 1}
\end{aligned}$$

38 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. (a) Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   (c) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ et en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$
   (d) Rappeler la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 2.$$
4. On définit une suite (v_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n^2.$$
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.
   (b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ de deux manières différentes.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \geqslant 1$".
   - $u_0 = 1 \geqslant 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie (i.e. $u_n \geqslant 1$). Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Il y a :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geqslant \sqrt{u_n^2} = u_n \geqslant 1$$
   - Par récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a bien :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geqslant \sqrt{u_n^2} = u_n$$
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}^2 - u_n^2 = \left(u_n^2 + \frac{1}{2^n}\right) - u_n^2 = \frac{1}{2^n}$$

On en déduit donc bien que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$2^n(u_{n+1} + u_n) \geqslant 2^n \times (1+1) = 2^{n+1}$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)} \leqslant \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$

On, en déduit que :

$$u_n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

D'où :

$$\boxed{u_n \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$$

(d) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{1 - \frac{1}{2^n}}$$

On en déduit que :

$$u_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \leqslant 2$$

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n} = v_n + \frac{1}{2^n}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

et par ailleurs

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 = v_n - 1$$

D'où :

$$v_n = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \boxed{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

(c) On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{v_n} = \boxed{\sqrt{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}}$$