

1 Suites r curren tes et formules explicites

1 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n .

2 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.

Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n .

3 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n .

4 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + \frac{n}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. La suite (u_n) est-elle majorée ?

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $n+2 \leq 2^n$. La suite (u_n) est-elle minorée ?

5 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4$, $u_1 = 8$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$.

6 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{7}{3}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

7 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $n \leq u_n$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

8 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \frac{u_n}{n+2}$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 5 - 3 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$.

9 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq n!$.

2 Raisonnements par récurrence

10 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^n \geq 2^n + 3^n$.

11 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

12 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1$.

3 Sommes et produits

13 Soit $n \geq 5$. Compléter les trous dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=3}^n u_{k+2} = \sum_{k=\bullet}^{\bullet} u_k, \quad \sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{\bullet} u_{\bullet}, \quad \sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=\bullet}^n u_{\bullet}$$

14 Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k), \quad \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

15 Calculer pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

16 Calculer les sommes et produits suivants pour $n \geq 2$:

1. $\prod_{k=0}^n 2$	3. $\sum_{k=n}^{2n} 1$	5. $\prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1}$
2. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$	4. $\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$	6. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

17 Calculer les sommes et produits suivants pour $n \geq 2$:

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$	3. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	5. $\prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$
2. $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$	4. $\sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2-1}{k^2} \right)$	6. $\prod_{k=0}^n \left(x^{2 \times 3^k} + x^{3^k} + 1 \right)$

18 Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

19 Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\alpha}{t - 1} + \frac{\beta}{t + 1}$$

En déduire la valeur de la somme : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$.

20 Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

21 Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

22 En utilisant les relations de Chasles, calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n), \quad \sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$$

4 Sommes classiques

23 Calculer les sommes suivantes pour $n \geq 2$:

1. $\sum_{k=0}^n (-1)^k$	9. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1}$	17. $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} 2^k$
2. $\sum_{k=2}^n 2^k$	10. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} 2^{2k}$	18. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} 3^{k-1} 2^{n-k}$
3. $\sum_{k=0}^{2n} 5^{-k}$	11. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} (-1)^k 3^{k-1}$	19. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} (-1)^k 3^{k+1}$
4. $\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$	12. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$	20. $\sum_{k=1}^n k \binom{n+1}{k} 2^k$
5. $\sum_{k=0}^n (2k+1)$	13. $\sum_{k=2}^n \frac{2+4^{n+k}}{2^k}$	21. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$
6. $\sum_{k=0}^n \frac{3^{n+k}}{2^k}$	14. $\sum_{k=1}^n k(k^2-2k)$	22. $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1}$
7. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$	15. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$	23. $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}$
8. $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}$	16. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^k$	

5 Coefficients binomiaux

24 Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k > p$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

En déduire que pour $n \geq p$, on a $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Application : Calculer $\sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3)$.

25 Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n-1$.

Montrer que pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq p$, on a : $\binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p} \binom{p}{j}$.

En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j}$

6 Sommes doubles

26 Calculer les sommes doubles suivantes pour $n \geq 2$:

$$\begin{array}{l}
 1. \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}. \\
 2. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j).
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3. \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij. \\
 4. \sum_{1 \leq i < j \leq n} i.
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 5. \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j). \\
 6. \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}.
 \end{array}$$

27 Vérifier que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$, puis calculer cette somme.

28 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad v_n = b_{n+1} - b_n$$

1. Montrer que : $\sum_{k=0}^n a_k b_k = u_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k$.

2. Application : calculer la somme $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

29 Montrer que pour $N \geq 1$: $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$.

30 On note pour $n \geq 2$: $V = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$, $W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij$, $X = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$, $Y = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij$, $Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Calculer V . En déduire W . Exprimer W en fonction de X et Y .

Montrer, sans calcul, que $X = Y$. En déduire X puis Z .

7 Suites usuelles

31 On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$.

1. Montrer par récurrence sur n que u_n existe et $1 \leq u_n < 2$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n-2}$.

(a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

(b) Exprimer u_n en fonction de n .

32 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4-u_n}$.

1. Montrer par récurrence sur n que u_n existe et $1 < u_n < 3$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-3}$.

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

(b) Exprimer u_n en fonction de n .

33 Calculer le terme général des suites (u_n) suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 4$.

2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3v_n + 4$.

3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

8 Pour aller plus loin

34 On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}.$$

(c) Calculer finalement la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$ en fonction de n .

35 On souhaite montrer que pour tous entiers p, n tels que $0 \leq p \leq n - 1$:

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$$

- Démontrer la formule en utilisant plusieurs fois la relation de Pascal : $\binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1}$.
- Démontrer la formule par récurrence sur n .
- Démontrer la formule par récurrence sur p .
(Rappel : par convention, on pose que si $p \geq n$, $\binom{n-1}{p} = 0$).

36 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = n2^{n-1}$
- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$$

- Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n 2^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

37

- Soit p un entier fixé, tel que $p \geq 1$. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $k^4 = 24 \binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k$.
- Soit $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n k$, $\sum_{k=2}^n k^2$ et $\sum_{k=2}^n k^3$.
- Montrer pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k+2}{4} = \binom{n+3}{5}$$

- En déduire que pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} - 1$$

38 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
3. (a) Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)}.$$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) Calculer pour $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}.$$

(d) Rappeler la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq 2.$$

4. On définit une suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n^2.$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n .
- (b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ de deux manières différentes.
En déduire l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.