**06.1** Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = (3+2i)(5+i) - (2-i)(1+i)$
2. $z_2 = \dfrac{1}{1+i} - 1$
3. $z_3 = i^n$ ($n \in \mathbb{N}$),
4. $z_4 = \dfrac{(2+i)^2}{1-3i}$
5. $z_5 = (i-\sqrt{2})^3$
6. $z_6 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{i+1} - 1}$

1.

$$z_1 = (3+2i)(5+i) - (2-i)(1+i) = (15+13i+2i^2) - (2+i-i^2) = (13+13i) - (3+i) = \boxed{10+12i}$$

2.

$$z_2 = \frac{1}{1+i} - 1 = \frac{1-(1+i)}{1+i} = \frac{-i}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{2} = \frac{-i+i^2}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$$

3. On a $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$,... par une récurrence immédiate on obtient :

$$z_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -i & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

4.

$$z_4 = \frac{(2+i)^2}{1-3i} = \frac{(4+4i+i^2)(1+3i)}{1+9} = \frac{(3+4i)(1+3i)}{10} = \frac{3-12+4i+9i}{10} = \boxed{\frac{-9}{10} + \frac{13}{10}i}$$

5.

$$z_5 = (i-\sqrt{2})^3 = i^3 + 3i^2(-\sqrt{2}) + 3i(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^3 = -i + 3\sqrt{2} + 6i - 2\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}+5i}$$

6.

$$z_6 = \frac{1}{\dfrac{1}{i+1} - 1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{\dfrac{-1-i}{2}} = \frac{-2}{1+i} = \frac{-2(1-i)}{2} = \boxed{-1+i}$$

**06.2** Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

1. $z_1 = 1+i$
2. $z_2 = 1-i$
3. $z_3 = 1+\sqrt{3}i$
4. $z_4 = -2$
5. $z_5 = -\sqrt{2}i$
6. $z_6 = (1+\sqrt{3}i)^5$

1. $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et alors :

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

2. On a directement $z_2 = \overline{z_1}$, donc :

$$z_2 = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

3. $|z_3| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ et alors :
$$z_3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
4. On a directement $z_4 = -2 = \boxed{2e^{i\pi}}$
5. On a directement $z_5 = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}}$
6. $z_6 = (1+\sqrt{3}i)^5 = z_3^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = \boxed{2^5 e^{i\frac{5\pi}{3}}}$

**06.3** Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le module de $z_1 = t^2 + 2it - 1$ et de $z_2 = \dfrac{1+it}{1-it}$, simplifiés au maximum.

1. On a $t^2 + 2it - 1 = t^2 + 2it + i^2 = (t+i)^2$. Donc : $|z_1| = \left|(t+i)^2\right| = |t+i|^2 = \left(\sqrt{t^2+1}\right)^2 = \boxed{t^2+1}$.
2. Notons $z_3 = 1 + it$. On a alors : $|z_2| = \left|\dfrac{1+it}{1-it}\right| = \dfrac{|1+it|}{|1-it|} = \dfrac{|z_3|}{|\overline{z_3}|} = \dfrac{|z_3|}{|z_3|} = \boxed{1}$.

**06.4** Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Mettre les complexes $z_1 = e^{i\theta} + 1$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En factorisant par l'angle moitié, on obtient :
$$z_1 = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
**<u>1er cas:</u>** si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$, alors :
$$z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
qui fournit exactement la forme exponentielle de $z_1$.
**<u>2ème cas:</u>** si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant 0$, alors :
$$z_1 = \left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi}$$
qui fournit exactement la forme exponentielle de $z_1$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En factorisant par l'angle moitié, on obtient :
$$z_1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}-i\frac{\pi}{2}}$$
**<u>1er cas:</u>** si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$, alors :
$$z_2 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}-i\frac{\pi}{4}}$$
qui fournit exactement la forme exponentielle de $z_2$.
**<u>2ème cas:</u>** si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant 0$, alors :
$$z_2 = \left(-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\frac{\theta}{2}+i\frac{3\pi}{4}}$$
qui fournit exactement la forme exponentielle de $z_2$.

**06.5** Démontrer les formules suivantes pour tous réels $a$ et $b$.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

1. $\cos(a+b) = \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right)$.
   Or
$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b) + i^2\sin(a)\sin(b) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)) \end{aligned}$$
   Donc en prenant la partie réelle, on trouve bien que
$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$
2. En utilisant la relation précédente, on a :
$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) = \boxed{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$
3. $\sin(a+b) = \mathrm{Im}\left(e^{i(a+b)}\right)$
   Or, on a déjà calculé $e^{i(a+b)} = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))$.
   Donc en prenant la partie imaginaire, on trouve bien que
$$\boxed{\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)}$$
4. En utilisant la relation précédente, on a :
$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \cos(a)\sin(-b) + \sin(a)\cos(-b) = \boxed{-\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)}$$

**06.6** Démontrer les formules suivantes pour tous réels $a$ et $b$.

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

1. $\cos(a) + \cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}(e^{ia} + e^{ib})$
   Or
$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \end{aligned}$$
   Donc en prenant la partie réelle, on obtient bien que
$$\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

2. $\cos(a) - \cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) - \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}(e^{ia} - e^{ib})$
   Or
   $$\begin{aligned} e^{ia} - e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{i\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{a+b}{2}} 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \end{aligned}$$
   Donc en prenant la partie réelle, on obtient bien que
   $$\boxed{\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$
3. $\sin(a) + \sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia}) + \mathrm{Im}(e^{ib}) = \mathrm{Im}(e^{ia} + e^{ib})$
   Or on a déjà calculé $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$, donc en prenant les parties imaginaires, on obtient bien que
   $$\boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$
4. En utilisant la relation précédente, on a :
   $$\boxed{\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

**06.7** En utilisant la Formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

1. $$\cos(2x) = \mathrm{Re}\left(e^{i2x}\right)$$
   Or,
   $$e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x)$$
   Donc
   $$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$
   On a donc
   $$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1}$$
2. $$\cos(3x) = \mathrm{Re}\left(e^{i3x}\right)$$
   Or,
   $$e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^2(x)$$
   Donc
   $$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$
   On a donc
   $$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$$

3.
$$\cos(5x) = \mathrm{Re}\left(e^{i5x}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned} e^{i5x} &= (e^{ix})^5 = (\cos(x) + i\sin(x))^5 \\ &= \cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) \\ &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\left(1-\cos^2(x)\right) + 5\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\left(1-\cos^2(x)\right) \\ &= \boxed{16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)} \end{aligned}$$

**06.8** Linéariser : $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^4(x)$, $\sin^2(x)\cos^2(x)$.

1.
$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{-4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 \\ &= \frac{-1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{-1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2\right) \\ &= \frac{-1}{4}(2\cos(2x) - 2) = \frac{-1}{2}(\cos(2x) - 1) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left((e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6)} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{-1}{16}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}-2\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right) \\
&= \frac{-1}{16}\left(e^{4ix}+1+2e^{2ix}+1+e^{-4ix}+2e^{-2ix}-2e^{2ix}-2e^{-2ix}-4\right) \\
&= \boxed{\frac{-1}{16}\left(2\cos(4x)-2\right)}
\end{aligned}$$

**06.9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(2x)=0$
2. $\sin(3x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x)\geqslant 0$
4. $\cos(x)=\sin(x)$
5. $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
6. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.
$$\cos(2x)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2. Remarquons que $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. On a donc pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}
\sin(3x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin(3x)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) &\iff \left\{\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z}\ /\ 3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ 3x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi,\ \frac{4\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

3.
$$\cos(x)\geqslant 0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]}$.

4.
$$\cos(x)=\sin(x) \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

5.

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff 3x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6.

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\boxed{\textbf{06.10}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

1.

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

On doit donc chercher la partie réelle de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$.

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}} & \text{si } e^{ix} \neq 1 \\ n+1 & \text{si } e^{ix} = 1 \end{array}\right.$$

Or

$$e^{ix} = 1 \iff \exists p \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2p\pi$$

**1er cas :** $\exists p \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2p\pi$, alors $e^{ix} = 1$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = n+1, \qquad \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = n+1$$

**2ème cas :** $\forall p \in \mathbb{Z},\ x \neq 2p\pi$, alors $e^{ix} \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}} &= \frac{e^{i\frac{x(n+1)}{2}}\left(e^{-i\frac{x(n+1)}{2}} - e^{i\frac{x(n+1)}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{-2i\sin\left(\dfrac{x(n+1)}{2}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\dfrac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \\ &= \left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right] \frac{\sin\left(\dfrac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\dfrac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

On en conclut donc que

$$\boxed{A_n(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \in \{2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}\} \\ \cos\left(\dfrac{nx}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\dfrac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}}$$

2.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

On doit donc chercher la partie imaginaire de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$.

Or, on a déjà calculé cette somme dans la question précédente. On en déduit que

$$\boxed{B_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}\} \\ \sin\left(\dfrac{nx}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\dfrac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}}$$

3.

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right)$$

On doit donc chercher la partie réelle de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}$. Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k \\ &= (e^{ix}+1)^n \\ &= \left(e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}\right)\right)^n \\ &= e^{\frac{inx}{2}}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \\ &= 2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{C_n(x) = 2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

4.
$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Im}\left(e^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\right)$$

On doit donc chercher la partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}$. Or, on l'a déjà calculée à la question précédente : on a donc

$$\boxed{D_n(x) = 2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

**06.11** Soit $a$ un réel strictement positif. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (donner les solutions sous forme algébrique et exponentielle) :

1. $z^2 = a$
2. $z^2 = -a$
3. $z^2 = ia$
4. $z^2 = -ia$
5. $z^2 = -a^2$
6. $z^2 = ia^2$

1. $z^2 = a \iff z^2 = (\sqrt{a})^2 \iff z = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{a}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm\sqrt{a}\}}$$

2. $z^2 = -a \iff z^2 = (i\sqrt{a})^2 \iff z = i\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{a}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm i\sqrt{a}\}}$$

3. $z^2 = ia \iff z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a}\right)^2 \iff z = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad z = -e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{a}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a}\}}$$

4. $z^2 = -ia \iff z^2 = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a}\right)^2 \iff z = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad z = -e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a}\}}$$

5. $z^2 = -a^2 \iff z^2 = (ia)^2 \iff z = ia \quad \text{ou} \quad z = -ia$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm ia\}}$$

6. $z^2 = ia^2 \iff z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}a\right)^2 \iff z = e^{i\frac{\pi}{4}}a \quad \text{ou} \quad z = -e^{i\frac{\pi}{4}}a$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm e^{i\frac{\pi}{4}}a\}}$$

**06.12** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

1. $iz + 5i - 3 = (1-4i)z - 1$
2. $(iz+1)^2(2z-3i) = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 = 8 - 6i$
5. $z^2 = 2 - 3i\sqrt{5}$
6. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$
7. $z^2 - (1+5i)z - 6 + 7i = 0$
8. $(z+1)^4 + (z+1)^2 + 1 = 0$
9. $z^3 = i$
10. $z^3 = 4\sqrt{2}(1-i)$
11. $z^6 + 64 = 0$
12. $e^z = 2 + 2i$
13. $(z-2)^n = (z+2)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
14. $(z+i)^n = (z-i)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$iz + 5i - 3 = (1-4i)z - 1 \iff (5i-1)z = 2 - 5i \iff z = \frac{2-5i}{-1+5i} = \frac{(2-5i)(-1-5i)}{1^2+5^2} = \frac{-27-5i}{26}$$
d'où :
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-27-5i}{26}\right\}}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$(iz+1)^2(2z-3i) = 0 \iff \begin{cases} iz+1 = 0 \\ \text{ou} \\ 2z - 3i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = i \\ \text{ou} \\ z = \frac{3}{2}i \end{cases}$$

3. **1ère méthode :** $z^2 + z + 1 = 0$ : on calcule $\Delta = 1 - 4 = -3$. Il y a donc deux solutions qui sont complexes conjuguées :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\} = \{j, j^2\}$$
**2ème méthode :** on vérifie que $z = 1$ n'est pas une solution de l'équation. Puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, on a :
$$1 + z + z^2 = 0 \iff \frac{1-z^3}{1-z} = 0 \iff z^3 = 1 \iff z \in \mathbb{U}_3 \setminus \{1\}$$
et donc :
$$\boxed{\mathcal{S} = \{j, j^2\}}$$

4. $\underline{z^2 = 8 - 6i}$
Cherchons $x, y$ deux réels tels que $(x+iy)^2 = 8 - 6i$. On a :
$$(x+iy)^2 = 8 - 6i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2+6^2} = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) = (3,-1) \\ \text{ou} \\ (x,y) = (-3,1) \end{cases}$$

On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 = 8 - 6i \iff z^2 = (3-i)^2 \iff z = \pm(3-i)$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{3-i, -3+i\}}$$

5. $z^2 = 2 - 3i\sqrt{5}$

   Cherhons $x, y$ deux réels tels que : $(x+iy)^2 = 2 - 3i\sqrt{5}$. On a :

$$(x+iy)^2 = 2-3i\sqrt{5} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2^2 + 3^2 \times 5} = 7 \\ 2xy = -3\sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{9}{2} \\ y^2 = \frac{5}{2} \\ xy = \frac{-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2}) \\ \text{ou} \\ (x,y) = (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

6. $\underline{iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0}$

   On a $\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = (-16 - 24i + 9) - 4i^2 + 20i = -3 - 4i$.

   Cherchons $x, y$ deux réels tels que $(x+iy)^2 = -3 - 4i$. On a :

$$(x+iy)^2 = -3-4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) = (-1, 2) \\ \text{ou} \\ (x,y) = (1, -2) \end{cases}$$

   On a donc $\Delta = -3 - 4i = (1-2i)^2$. On a donc deux solutions complexes pour l'équation :

$$z_1 = \frac{-(4i-3) - (1-2i)}{2i} = \frac{-4i + 3 - 1 + 2i}{2i} = -1 - i$$

   et

$$z_2 = \frac{-(4i-3) + (1-2i)}{2i} = \frac{-4i + 3 + 1 - 2i}{2i} = -3 - 2i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3-2i,\ -1-i\}}$$

7. $\underline{z^2 - (1+5i)z - 6 + 7i = 0}$

   On a $\Delta = (1+5i)^2 - 4(-6+7i) = 1 - 25 + 10i + 24 - 28i = -18i = 2 \times 9 \times e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}3e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^2 = (-3+3i)^2$.

   On a donc deux solutions complexes pour l'équation :

$$z_1 = \frac{(1+5i) - (-3+3i)}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$$

   et

$$z_2 = \frac{(1+5i) + (-3+3i)}{2} = \frac{-2+8i}{2} = -1 + 4i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2+i,\ -1+4i\}}$$

8. $\underline{(z+1)^4 + (z+1)^2 + 1 = 0}$

   Posons $u = (z+1)^2$ et résolvons déjà $u^2 + u + 1 = 0$.

   On a $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc :

$$u^2 + u + 1 = 0 \iff u = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \iff u = j \text{ ou } u = j^2 \iff u = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ ou } e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(z+1)^4+(z+1)^2+1=0 &\iff (z+1)^2=e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ ou } (z+1)^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}\\ &\iff (z+1)^2=(e^{\frac{i\pi}{3}})^2 \text{ ou } (z+1)^2=(e^{\frac{2i\pi}{3}})^2\\ &\iff z+1=\pm e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ ou } z+1=\pm e^{\frac{2i\pi}{3}}\\ &\iff z=-1\pm\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } z=-1\pm\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

9. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}z^3=i &\iff z^3=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3\\ &\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^3=1\\ &\iff \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=1 \quad\text{ou}\quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=j \quad\text{ou}\quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=j^2\\ &\iff z=e^{i\frac{\pi}{6}} \quad\text{ou}\quad z=e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{2\pi}{3}} \quad\text{ou}\quad z=e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{4\pi}{3}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{i\frac{5\pi}{6}},\ e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}}$$

10. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}z^3=4\sqrt{2}(1-i) &\iff z^3=8\left(\sqrt{2}2-\sqrt{2}2i\right)\\ &\iff z^3=8e^{-i\frac{\pi}{4}}\\ &\iff z^3=(2e^{-i\frac{\pi}{12}})^3\\ &\iff \left(\frac{z}{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}\right)^3=1\\ &\iff \frac{z}{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}=1 \text{ ou } \frac{z}{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}=j \text{ ou } \frac{z}{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}=j^2\\ &\iff z=2e^{-i\frac{\pi}{12}} \text{ ou } z=2e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ ou } z=2e^{i\frac{5\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{2e^{-i\frac{\pi}{12}},2e^{i\frac{7\pi}{12}},\ 2e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}}$$

11. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}z^6+64=0 \iff z^4=-64 &\iff z^4=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}2\right)^6\\ &\iff \left(\frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^6=1\\ &\iff \exists k\in[\![0,5]\!]\ /\ z=2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{ki\frac{2\pi}{6}}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{2e^{i\frac{\pi}{6}+ik\frac{\pi}{3}},\ k\in[\![0,5]\!]\right\}}$$

12. Cherchons $z$ sous la forme $z = x + iy$. Alors

$$e^{x+iy} = 2 + 2i \iff e^x e^{iy} = 2 + 2i \iff e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) = 2 + 2i$$

Ecrivons $2 + 2i$ en forme trigonométrique. On $|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Donc $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Ainsi, on doit trouver les couples $(x, y)$ qui vérifient :

$$e^x e^{iy} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Autrement dit on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{l} e^x = 2\sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \ln(2^{3/2}) = \frac{3}{2}\ln() \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

13. $\underline{(z-2)^n = (z+2)^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
Déjà, remarquons que $-2$ n'est pas une solution de l'équation (on obtiendrait $(-4)^n = 0^n \ldots$).
On peut donc <u>résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.</u>
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -2$ :

$$\begin{aligned}
(z-2)^n = (z+2)^n &\iff \left(\frac{z-2}{z+2}\right)^n = 1 \quad (\text{car } z \neq -2) \\
&\iff \frac{z-2}{z+2} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \frac{z-2}{z+2} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z - 2 = ze^{\frac{2ik\pi}{n}} + 2e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = 2 + 2e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \ / \ z = \frac{2 + 2e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \quad (\text{on doit enlever le cas } k = 0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{2 + 2e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}, \quad k \in [\![1, n-1]\!]\right\}}$$

14. $\underline{(z+i)^n = (z-i)^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
Déjà, remarquons que $i$ n'est pas une solution de l'équation (on obtiendrait $(2i)^n = 0^n \ldots$).
On peut donc <u>résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.</u>

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i$ :

$$\begin{aligned}
(z+i)^n = (z-i)^n &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \quad (\text{car } z \neq i) \\
&\iff \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z + i = ze^{\frac{2ik\pi}{n}} - ie^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = i - ie^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \ / \ z = \frac{i - ie^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \quad (\text{on doit enlever le cas } k = 0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{i - ie^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}, \quad k \in [\![1, n-1]\!] \right\}}$$

**06.13** Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3} + i$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Cherchons les réels $x$ et $y$ tels que :

$$(x+iy)^2 = \sqrt{3} + i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3+1} = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 2 + \sqrt{3} \\ 2y^2 = 2 - \sqrt{3} \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ xy > 0 \end{cases}$$

Les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sont donc :

$$\boxed{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{-\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Mais d'autre part, on a :

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\sqrt{3}2 + \frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$$

donc nécessairement, par identification on a :

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

autrement dit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}}$$

**06.14** On note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$.
On pose $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
Calculer $u + v$ et $uv$. En déduire $u$ et $v$.

Remarquons que par son expression, on reconnaît que $\omega$ est une racine 7-ième de 1, donc $\omega^7 = 1$.

$$\begin{aligned} u + v &= \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 \\ &= \sum_{k=1}^{6} \omega^k \\ &= \omega \frac{1 - \omega^6}{1 - \omega} \quad \text{car } \omega \neq 1 \\ &= \frac{\omega - \omega^7}{1 - \omega} \\ &= \frac{\omega - 1}{1 - \omega} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uv &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\ &= \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) + 2 \\ &= 0 + 2 = \boxed{2} \end{aligned}$$

On cherche donc $u$ et $v$ tels que $u + v = -1$ et $uv = 2$. Autrement dit, on sait que $u$ et $v$ sont les deux racines du polynôme

$$X^2 + X + 2$$

(car la somme des racines fait $-1$ et le produit des racines fait 2).

Or, on connaît les solutions de cette équation : $\Delta 1 - 8 = -7 = 7i^2$. Donc les deux solutions de l'équation sont :

$$\frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad -1 + i\sqrt{7}2$$

Donc $u$ et $v$ sont donc les deux valeurs précédentes.

**06.15**

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leqslant x$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sin(x) - x$.
   La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$$
   La fonction $f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$

   | $x$ | $0$ | $+\infty$ |
   |---|---|---|
   | $f'(x)$ | $+$ | |
   | $f(x)$ | $0$ $\searrow$ | |

   $f(0) = \sin(0) - 0 = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant 0$, autrement dit
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin(x) - x \leqslant 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leqslant x$$

2. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
   Déjà remarquons que la fonction $g$ est paire. Etudions-la sur $[0, +\infty[$ et par symétrie, nous en déduirons l'étude sur $]-\infty, 0]$. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g'(x) = -\sin(x) + x = -f(x) \geqslant 0$$
   La fonction $g$ est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, on en déduit que la fonction $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

   | $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|
   | $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
   | $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

   $g(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$, autrement dit
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

**06.16** Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos(x)}-e}{\tan(x)\sin(3x)}$
2. $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
3. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)}$
4. $\lim_{x\to\pi/2} (1-\sin(x))\tan^2(x)$

1.
$$\frac{e^{\cos(x)}-e}{\tan(x)\sin(3x)} = \frac{e\left(e^{\cos(x)-1}-1\right)}{\tan(x)\sin(3x)}$$
Or, $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$.
De plus, $\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc finalement :
$$\frac{e^{\cos(x)}-e}{\tan(x)\sin(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e\times(\cos(x)-1)}{x\times 3x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{3x^2} = \frac{-e}{6}$$
D'où :
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e}{\tan(x)\sin(3x)} = \frac{-e}{6}}$$

2.
$$x\left(e^{1/x}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(e^{1/x}-1+1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(e^{1/x}-1\right)+x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
Or, $x\left(e^{1/x}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et, $x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x\left(\cos(1/x)-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\times\left(-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}\right) = \frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc, par somme, on en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

3.
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)} &= \frac{(1+\sin(x))-(1-\sin(x))}{\tan(x)\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\\ &= \frac{2\sin(x)}{\tan(x)\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2x}{2x} = 1\end{aligned}$$
donc,
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)} = 1$$

4. Posons $x = \frac{\pi}{2} - h$,
$$\frac{1-\sin(x)}{\tan^2(x)} = \frac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-h\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}$$
Rappelons que $\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \cos(h)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \sin(h)$. On a donc
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)} = \frac{\cos(h)}{\sin(h)}$$
On a donc
$$\frac{1-\sin(x)}{\tan^2(x)} = \frac{\cos^2(h)(1-\cos(h))}{\sin^2(h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1\times(1-\cos(h))}{h^2} = -\frac{(\cos(h)-1)}{h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$
donc
$$\lim_{x\to\pi/2} (1-\sin(x))\tan^2(x) = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\textbf{06.17}}$ Montrer que
$$\forall x \in [-1,1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Posons pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$.
La fonction $f$ est continue sur $[-1,1]$ comme somme de deux fonctions continues sur $[-1,1]$ et dérivable a priori sur $]-1,1[$ car c'est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$.
On a :
$$\forall x \in ]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
On en déduit donc que $f$ est constante sur tout l'intervalle $]-1,1[$, et par continuité en 1 et $-1$, elle est même constante sur tout $[-1,1]$.
Comme $f(0) = \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$, on en déduit que
$$\forall x \in [-1,1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\textbf{06.18}}$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
La fonction $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puisque $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et que la fonction Arctan est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

On en déduit donc que $f$ est constante sur chacun de ses intervalles de définition. Autrement dit, $f$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. A priori, aucune raison pour que ce soit la même valeur sur ces deux intervalles.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2$, donc si $f$ est constante sur $]0, +\infty[$, on doit avoir $f$ constante égale à $\pi/2$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2$, donc si $f$ est constante sur $]-\infty, 0[$, on doit avoir $f$ constante égale à $-\pi/2$.
Finalement, $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**06.19** Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto 2\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \text{Arctan}(x)$$

est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 > 0$), et la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $f$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\text{Arctan}(u(x)) + \text{Arctan}(x)$$

avec $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

Ici, $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)\frac{1}{1+(\sqrt{x^2+1}-x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= 2\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{1+(x^2+1)-2x\sqrt{x^2+1}+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= 2\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{2(1+x^2)-2x\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.
En 0, on a $f(0) = 2\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(0)$.
Or, $\tan(\pi/4) = 1$, donc $\text{Arctan}(1) = \pi/4$, on a donc $f(0) = \pi/2$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} = 2\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

**06.20** Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$$

Posons pour tout $x \in [0,1], f(x) = \text{Arcsin}(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$.
La fonction $f$ est bien définie sur $[0,1]$ car $\text{Arcsin}(t)$ a un sens pour $t \in [-1,1]$ et si $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \in [-1,1]$ et $2x-1 \in [-1,1]$.
De plus, $f$ est continue sur $[0,1]$ comme somme de composées de fonctions continues.
Enfin, $f$ est dérivable sans problème sur $]0,1[$ ouvert (car Arcsin pas dérivable en $-1$ et $1$, et $t \mapsto \sqrt{t}$ pas dérivable en 0). On a alors :

$$\forall x \in ]0,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = 0$$

La fonction $f$ est donc constante sur $]0,1[$, donc constante sur $[0,1]$ (car continue en 0 et 1), et remarquons que $f(1) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, $f$ est constante égale à $\pi/4$, autrement dit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$$

**06.21** Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et la simplifier en une expression en racines (n'utilisant plus de fonction trigonométrique ni réciproque)

1. $f(x) = \sin(\text{Arccos}(x))$
2. $g(x) = \cos(\text{Arcsin}(x))$
3. $h(x) = \tan(\text{Arcsin}(x))$
4. $u(x) = \cos(\text{Arctan}(x))$
5. $v(x) = \sin(\text{Arctan}(x))$

1. $f(x) = \sin(\text{Arccos}(x))$ existe seulement si $x \in [-1,1]$. On a :

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \Longrightarrow \forall x \in [-1,1],\ \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - (\cos(\text{Arccos}(x))^2 = 1 - x^2$$

   Or, $\forall x \in [-1,1], \text{Arccos}(x) \in [0,\pi]$, donc $\sin(\text{Arccos}(x)) \geqslant 0$. On a donc

$$\forall x \in [-1,1], \ \boxed{\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}}$$

2. $g(x) = \cos(\text{Arcsin}(x))$ existe seulement si $x \in [-1,1]$. On a :

$$\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) \Longrightarrow \forall x \in [-1,1],\ \cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - (\sin(\text{Arcsin}(x))^2 = 1 - x^2$$

   Or, $\forall x \in [-1,1], \text{Arcsin}(x) \in [-\pi/2,\pi/2]$, donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geqslant 0$. On a donc

$$\forall x \in [-1,1], \ \boxed{\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}}$$

3. $h(x) = \tan(\text{Arcsin}(x))$ existe seulement si $\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ \text{Arcsin}(x) \notin \{-\pi/2, \pi/2\} \end{cases} \iff x \in ]-1, 1[$. On a :

$$\tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

4. $u(x) = \cos(\text{Arctan}(x))$ existe pour tout réel $x$. $D_u = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons pour simplifier un peu $y = \text{Arctan}(x)$. Il s'agit de calculer $\cos(y)$. On a :

$$y = \text{Arctan}(x) \iff x = \tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

donc on voit apparaître $\cos(y)$ :

$$x\cos(y) = \sin(y) \Longrightarrow x^2\cos^2(y) = \sin^2(y)$$

et ainsi

$$x^2\cos^2(y) = 1 - \cos^2(y)$$

autrement dit

$$\cos^2(y)(x^2+1) = 1$$

Ainsi

$$\boxed{\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

5. $v(x) = \sin(\text{Arctan}(x))$ existe pour tout réel $x$. $D_v = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons pour simplifier un peu $y = \text{Arctan}(x)$. Il s'agit de calculer $\sin(y)$. On a :

$$y = \text{Arctan}(x) \iff x = \tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

donc on voit apparaître $\sin(y)$ :

$$\sin(y) = x\cos(y) \Longrightarrow \sin^2(y) = x^2\cos^2(y) = x^2(1-\sin^2(y))$$

et ainsi

$$\sin^2(y)(x^2+1) = x^2$$

Ainsi

$$\sin^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

De plus, si $x \geqslant 0$, $\text{Arctan}(x) \in [0, \pi/2[$, donc $\sin(\text{Arctan}(x)) \geqslant 0$.
De même, si $x \leqslant 0$, $\text{Arctan}(x) \in ]-\pi/1, 0[$, donc $\sin(\text{Arctan}(x)) \leqslant 0$.

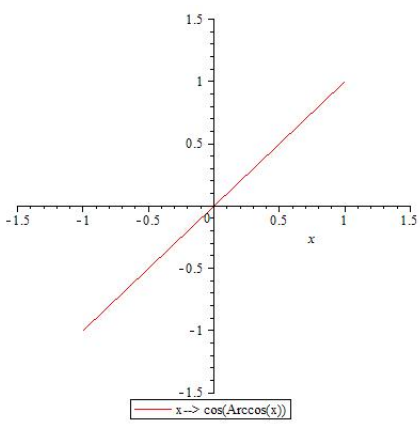
En conclusion, le signe doit changer en fonction de $x$. On a donc :

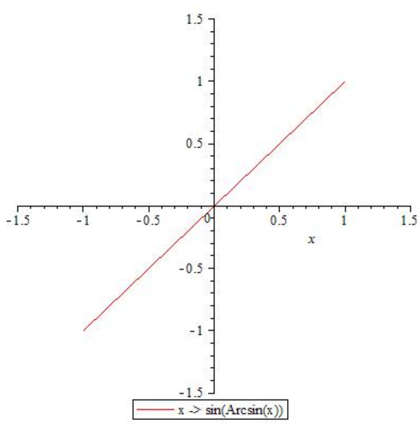
$$\boxed{\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

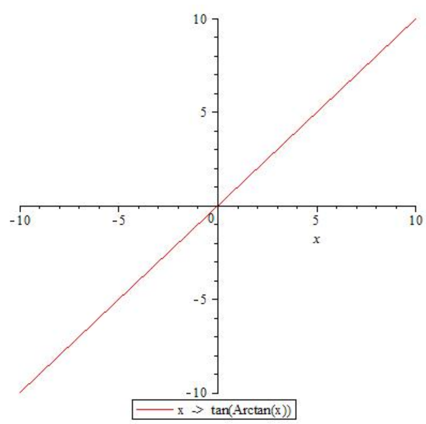
**06.22** Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, les symétries de $f$ (parité, périodicité), se ramener dans lequel l'expression de la fonction est simple, et en déduire la courbe.

1. $f(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$
2. $g(x) = \sin(\text{Arcsin}(x))$
3. $h(x) = \tan(\text{Arctan}(x))$
4. $u(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$
5. $v(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$
6. $w(x) = \text{Arctan}(\tan(x))$

1. $f(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$.
   $\text{Arccos}(x)$ n'a de sens que si $x \in [-1, 1]$, on en déduit que $D_f = [-1, 1]$, et on sait d'après le cours que
   $$\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\text{Arccos}(x)) = x$$
2. $g(x) = \sin(\text{Arcsin}(x))$
   $\text{Arcsin}(x)$ n'a de sens que si $x \in [-1, 1]$, on en déduit que $D_g = [-1, 1]$, et on sait d'après le cours que
   $$\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$$
3. $h(x) = \tan(\text{Arctan}(x))$
   $\text{Arctan}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a bien $D_h = \mathbb{R}$, et on sait d'après le cours que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\text{Arctan}(x)) = x$$

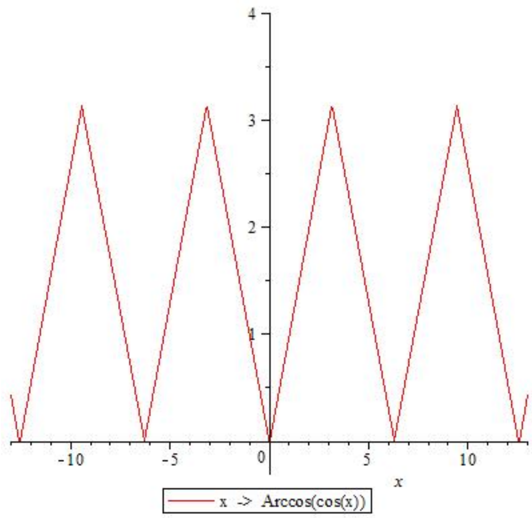



4. $u(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$

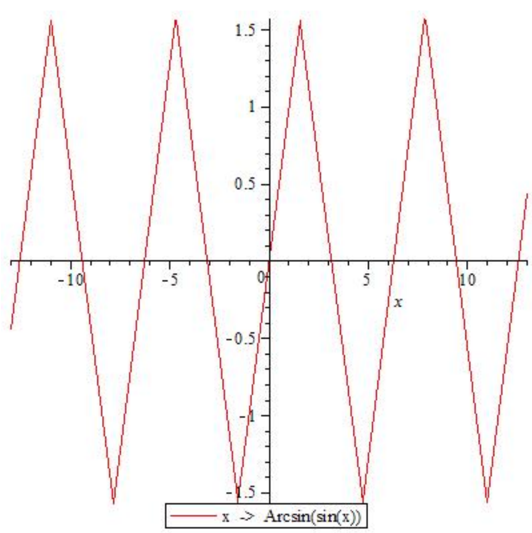
   $\text{Arccos}(y)$ n'a de sens que si $y \in [-1, 1]$, or ici $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc la fonction $u$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, u(x + 2\pi) = \text{Arccos}(\cos(x + 2\pi)) = \text{Arccos}(\cos(x)) = u(x)$, donc $u$ est $2\pi$-périodique.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = \text{Arccos}(\cos(-x)) = \text{Arccos}(\cos(x)) = u(x)$, donc $u$ est paire.
   Enfin, on sait que
   $$\forall x \in [0, \pi],\ \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$
   On sait donc tracer sur $[0, \pi]$, puis que $[-\pi, 0]$ par symétrie d'axe $(Oy)$, et enfin on reporte ce graphe avec une période de $2\pi$ :




5. $v(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$

   $\text{Arcsin}(y)$ n'a de sens que si $y \in [-1, 1]$, or ici $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc la fonction $v$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, v(x + 2\pi) = \text{Arcsin}(\sin(x + 2\pi)) = \text{Arcsin}(\sin(x)) = v(x)$, donc $v$ est $2\pi$-périodique.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, v(-x) = \text{Arcsin}(\sin(-x)) = \text{Arcsin}(-\sin(x)) = -\text{Arcsin}(\sin(x)) = -v(x)$, donc $v$ est impaire.
   (Remarquons que si sin est impaire, son graphe est symétrique par rapport à $O$, donc puisque Arcsin est le graphe symétrique de sin par rapport à $y = x$, le graphe de Arcsin est également symétrique par rapport à $O$, donc Arcsin est impaire.

   Enfin, on sait que
   $$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2],\ \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$
   On sait donc tracer sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
   De plus, pour tout $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, on a $\sin(x) = -\sin(x - \pi)$, on a donc :
   $$\forall x \in [\pi/2, 3\pi/2],\ \text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(-\sin(x - \pi)) = -\text{Arcsin}(\sin(x - \pi)) = (x - \pi) = -x + \pi$$
   On peut donc tracer également sur $[\pi/2, 3\pi/2]$, on a alors obtenu un graphe sur un intervalle d'amplitude $2\pi$. On obtient :



6. $w(x) = \text{Arctan}(\tan(x))$

   $\tan(x)$ n'a de sens que si $x \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $w$ est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, comme la fonction tangente.
   De plus, $\forall x \in D_w, w(x+\pi) = \text{Arctan}(\tan(x+\pi)) = \text{Arctan}(\tan(x)) = w(x)$, donc la fonction $w$ est $\pi$-périodique. Or, on sait d'après le cours que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

   On sait donc tracer sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis par $\pi$-périodicité, on reporte le dessin pour compléter la courbe