

Colle Info. 09 - Simulation de variables à densité

Exercice 09.1

1. Ecrire un programme qui simule 100 réalisations d'une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère $X = a + (b - a)U$. Quelle est la loi de X ?

Exercice 09.2

1. Soit U une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit a un réel strictement positif. On considère $X = -\frac{1}{a} \ln(1 - U)$. Quelle est la loi de X ?
2. En déduire un programme simulant 100 réalisations d'une VAR X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , le réel λ étant demandé à l'utilisateur.
3. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\Gamma(b, n)$ où $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un programme simulant 100 réalisations de la variable Y , les paramètres b et n étant demandés à l'utilisateur.

Exercice 09.3

Soit (Y_n) une suite de variables indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On pose X_n la variable centrée réduite associée à $\sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable suivant une loi normale centrée réduite.
2. En déduire un programme qui affiche 50 réalisations d'une VAR X qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. En déduire enfin un programme qui affiche 50 réalisations d'une VAR X qui suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, les paramètres m et σ étant demandés à l'utilisateur.

Exercice 09.4

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Déterminer alors une densité de X
2. Montrer que la fonction F réalise une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle à déterminer.
3. En déduire un programme simulant 100 réalisations de la variable X .