TP Informatique 21 - Révisions - Intégrales probabilites

Exercice 21.1

L'énoncé étudie la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

On admet que φ est strictement croissante sur $[1/3, 1/2]$ l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[1/3, 1/2]$.
Proposer un programme en Pascal permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

Méthode probabiliste pour calculer une intégrale :

Si f est positive et continue sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

On inscrit la surface dans un rectangle de dimensions connues, puis grâce au générateur de nombres aléatoires, on créé n points dont les coordonnées suivant des lois uniformes sur chacun des intervalles définissant le rectangle (abscisses et ordonnées).

On compte ensuite le nombre de points situés dans la surface à calculer. On désigne par p ce nombre de points. Le rapport $\frac{p}{n}$ est une valeur "probable" du rapport entre la surface cherchée et la surface du rectangle.

Exercice 21.2

Chercher une valeur approchée de l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-t^2} dt$, ceci pour n de plus en plus grand, à l'aide à chaque essai de $1000 \times n$ points aléatoires.
En déduire une valeur approchée de :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-t^2} dt$$

Exercice 21.3

Par une méthode analogue (probabiliste), déterminer une valeur approchée de π par un calcul d'aire simple que vous connaissez.