TP Informatique 19 - Calcul approché d'intégrales 2

1 Méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche à calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, ou du moins à en connaître une valeur approchée à ε près.
Dans les sommes de Riemann, on approche f par une fonction en escaliers, constante par morceaux. On va essayer ici d'approcher f plutôt par une fonction affine par morceaux. On pose donc la fonction g définie par :

et on pose : $T_n =$

Un calcul mathématique montre alors que :

$$\text{si } |f''| \leqslant M \text{ sur } [a, b], \quad \text{alors } \left|\int_a^b f(t)dt - T_n\right| \leqslant \frac{M}{12n^2}(b-a)^3$$

Exercice 19.1

On se propose de calculer une valeur approchée de $\int_0^{\pi/4} (1+\cos^2(t))dt$. Ecrire un programme nommé `trapezes` qui calcule une valeur approchée par excès et une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de cette intégrale

2 Méthode probabiliste

Méthode :
Si f est positive et continue sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

On inscrit la surface dans un rectangle de dimensions connues, puis grâce au générateur de nombres aléatoires, on créé n points dont les coordonnées suivant des lois uniformes sur chacun des intervalles définissant le rectangle (abscisses et ordonnées).

On compte ensuite le nombre de points situés dans la surface à calculer. On désigne par p ce nombre de points. Le rapport $\frac{p}{n}$ est une valeur "probable" du rapport entre la surface cherchée et la surface du rectangle.

Exercice 19.2

Chercher une valeur approchée de l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^n e^{-t^2}dt$, ceci pour n de plus en plus grand, à l'aide

à chaque essai de $1000 \times n$ points aléatoires.
En déduire une valeur approchée de :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-t^2} dt$$

Exercice 19.3

Par une méthode analogue (probabiliste), déterminer une valeur approchée de π par un calcul d'aire simple que vous connaissez.