TP Informatique 18 - Calcul approché d'intégrales 1

---

1 Méthode des rectangles (sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche à calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, ou du moins à en connaître une valeur approchée à ε près. On sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \qquad = \int_a^b f(t)dt$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \qquad = \int_a^b f(t)dt$$

Remarquons que si f est une fonction monotone sur $[a, b]$, alors on peut majorer et minorer facilement l'intégrale.

Posons $R_n =$

Un calcul mathématique montre alors que :

$$\text{si } |f'| \leqslant M \text{ sur } [a, b], \quad \text{alors } \left|\int_a^b f(t)dt - R_n\right| \leqslant \frac{M}{n}(b-a)^2$$

Exercice 18.1

On se propose de calculer une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-t^2}dt$. Ecrire un programme nommé `méthode des rectangles` qui calcule une valeur approchée par excès et une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de $\int_0^1 e^{-t^2}$.

On admettra que si $f : x \mapsto e^{-x^2}$, *on a* $\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{e}}$

2 Utilisation des points médians

Cette méthode est une application de la formule de Riemann sur les points médians des subdivisions.

On pose donc $M_n =$

Un calcul mathématique montre alors que :

$$\text{si } |f''| \leqslant K \text{ sur } [a, b] \quad \left|\int_a^b f(t)dt - M_n\right| \leqslant \frac{K}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Exercice 18.2

Ecrire un programme nommé `méthode point median` qui calcule une valeur approchée à au moins 10^{-5} près de $\int_1^2 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

On admettra que si $f : x \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, *on a* $\forall x \geqslant 1, |f''(x)| \leqslant \frac{11}{4e}$

3 Méthode probabiliste

Méthode :

Si f est positive et continue sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

On inscrit la surface dans un rectangle de dimensions connues, puis grâce au générateur de nombres aléatoires, on créé n points dont les coordonnées suivant des lois uniformes sur chacun des intervalles définissant le rectangle (abscisses et ordonnées).

On compte ensuite le nombre de points situés dans la surface à calculer. On désigne par p ce nombre de points. Le rapport $\dfrac{p}{n}$ est une valeur "probable" du rapport entre la surface cherchée et la surface du rectangle.

Exercice 18.3

Chercher une valeur approchée de l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^n e^{-t^2}dt$, ceci pour n de plus en plus grand, à l'aide à chaque essai de $1000 \times n$ points aléatoires.
En déduire une valeur approchée de :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^n e^{-t^2}dt$$