TP Informatique 17 - Résolution de $f(x) = 0$ par dichotomie

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone et telle que $f(a)f(b) < 0$.
On s'intéresse à l'équation $(E) \ : \ f(x) = 0$.

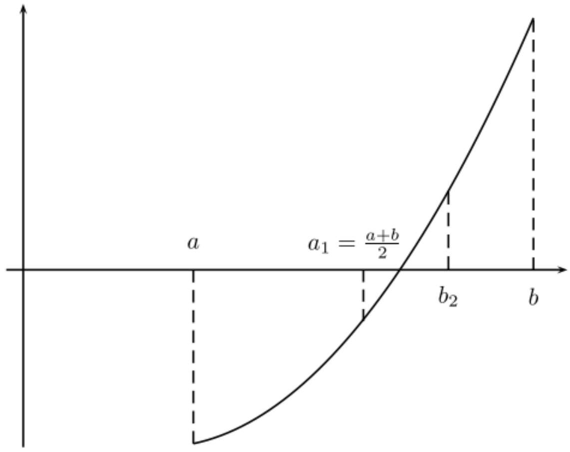
1. Rappeler pourquoi (E) admet au moins une solution.

2. Pourquoi la solution est-elle unique ? Pourquoi est-elle différente de a et de b ?

3. On note maintenant c l'unique solution de (E). La méthode de **dichotomie** permet :
   – au mieux de trouver c
   – au pire de trouver des suites (a_n) et (b_n) qui tendent vers c en l'encadrant.
   Plus précisément, on cherche c dans des intervalles $[a_n, b_n]$ qui sont de plus en plus petits (l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sera deux fois plus petit que $[a_n, b_n]$).

   Rappelons l'algorithme :
   - On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = b$.
   - Supposons que l'on ait déjà construit les premiers termes $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$. On a trois cas :
     – Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$, alors on prend $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et on s'arrête là.
     – Si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, alors $f(a_n)$ et $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ sont de signes différents.
     On va donc chercher c dans l'intervalle $\left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right]$.
     On pose donc $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
     – Si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, alors $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ a le même signe que $f(a_n)$, donc un signe différent de $f(b_n)$.
     On va donc chercher c dans l'intervalle $\left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$.
     On pose donc $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
     – On recommence !

   Si on a de la chance, au bout d'un certain temps, on va tomber dans le premier cas. C'est rare, donc on va plutôt chercher une valeur approchée de c, en calculant un certain nombre de a_n et de b_n , jusqu'à ce qu'on obtienne la précision désirée.



Exercice 17.1

Posons $f : \begin{array}{ccc} [1,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - \dfrac{1}{x} \end{array}$.

1. Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera c.

2. Ecrire un programme qui utilise la méthode de dichotomie pour donner un encadrement de c à la précision que vous souhaitez (vous pouvez faire demander cette précision ε à l'utilisateur).

   On utilisera la `FUNCTION f` définie par :

```
FUNCTION f(x : REAL) : REAL ;
BEGIN
f := ln(x) - 1/x ;
END ;
```

Exercice 17.2

Montrer que l'équation $x = e^{-x}$ admet une et une seule solution α sur $\mathbb{R}$. Donner une approximation à 10^{-5} près de α.

Exercice 17.3

1. Calculer une approximation de e avec $f(x) = \ln(x) - 1$.
2. Calculer une approximation de π avec $f(x) = \sin(x)$.
3. Calculer une approximation de $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 17.4

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies dans l'algorithme de dichotomie sont adjacentes. On pensera à montrer que $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$
3. Soit ℓ leur limite commune. Montrer que $f(\ell) = 0$.