

TP Informatique 14 - Algorithme de Hörner

1 Calcul intuitif de $P(x)$

On va essayer dans ce TP de calculer la valeur $P(x)$ d'un polynôme P en un réel x . Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Pour calculer $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, on peut calculer les x^k et faire la somme et faire ainsi ces calculs

$$P(x) = a_0 + a_1 \times x + a_2 \times x \times x + \cdots + a_n \times x \times x \times \cdots \times x$$

Exercice 14.1

1. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de $P(x)$

```

PROGRAM intuitif ;
TYPE POLYNOME = ARRAY[0..10] OF REAL ;
VAR n : INTEGER ;
    a : POLYNOME ;
    x : REAL ;
FUNCTION puiss(x : REAL ; n : INTEGER) : REAL ;

FUNCTION somme(n : INTEGER ; a : POLYNOME ; x : REAL) : REAL ;
    VAR s : REAL ;
        k : INTEGER ;
    BEGIN
        s := 0 ;
        FOR k := 0 TO n
            DO
                somme := s ;
            END ;
    BEGIN
        WRITELN('Donner le degré n et le réel x') ;
        READLN(n,x) ;
        FOR k := 0 TO n DO
            BEGIN
                WRITELN('Donner le coefficient ',k,' du polynôme') ;
                READLN(a[k]) ;
            END ;
        WRITELN('P(x) vaut ',somme(n,a,x)) ;
    END.

```

2. Combien fait-on d'opérations élémentaires effectue-t-on avec ce programme, en fonction de n ? (Une **opération élémentaire** est une addition, une multiplication, une soustraction ou une division).

2 Algorithme de Hörner

L'algorithme de Hörner est basé sur une autre méthode, qui est bien plus efficace comme on va le voir. Le principe est le suivant :

1. Etape 0 : on pose

$$P_0 = a_n$$

2. Etape 1 : on calcule

$$P_1 = a_{n-1} + P_0x =$$

3. Etape 2 : on calcule

$$P_2 = a_{n-2} + P_1x =$$

4. ...

5. Etape n : on calcule

$$P_n = a_0 + P_{n-1}x =$$

Exercice 14.2

1. Que vaut P_n dans l'algorithme de Hörner et plus généralement, que vaut P_k pour k entre 0 et n ?
2. Combien fait-on d'opérations élémentaires effectue-t-on lorsqu'on suit l'algorithme de Hörner, en fonction de n ?
(Une **opération élémentaire** est une addition, une multiplication, une soustraction ou une division). Comparer avec l'algorithme "intuitif"

Exercice 14.3

Dans cet exercice, on ne considèrera que des polynômes réels de degré au plus 10.

RAPPEL : pour connaître un polynôme, il suffit de connaître la liste de ses coefficients. Un polynôme de $\mathbb{R}_{10}[X]$ par la liste de ses 11 coefficients (éventuellement les derniers étant nuls si le degré est < 10).

1. Programmer l'algorithme de Hörner en Turbo-Pascal. Il faudra pour cela :
 - créer un type `POLYNOME` pour représenter les polynômes de $\mathbb{R}_{10}[X]$
 - demander à l'utilisateur de rentrer le polynôme P et le réel x
 - afficher la valeur de $P(x)$
2. Reprendre le programme précédent en utilisant une `FUNCTION valeur` qui prend en argument le degré n , le polynôme P et le réel x , et qui rend le résultat de l'algorithme de Hörner.

Exercice 14.4

Faire les deux méthodes (Hörner et "intuitif"), à la main, avec le polynôme

$$P = 3X^4 - 2X^3 + 6X^2 + 5X - 2 \quad \text{et} \quad x = 3$$

Donner le nombre d'opérations exécutées dans chaque cas.

Exercice 14.5

Ecrire une fonction qui, étant donné un polynôme P , calcule P' .