13.1 En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

Autrement dit, il nous faut montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2}$$

On reconnaît dans le terme de gauche $\Phi(x)$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Prenons X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. X admet bien une espérance (qui est nulle) et une variance (égale à 1), donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

Fixons-nous un $x > 0$. Alors, en appliquant l'inégalité précédente, pour $\varepsilon = x$, sachant que $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{V}[X] = 1$:

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| \geqslant x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant -x] \cup [X \geqslant x]\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}(-x < X < x) \\
&= 1 - (\Phi(x) - \Phi(-x)) \\
&= 1 - (2\Phi(x) - 1) = 2 - 2\Phi(x)
\end{aligned}$$

On a donc $2(1 - \Phi(x)) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, d'où

$$\Phi(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2}$$

ce qui est bien l'inégalité voulue.

13.2 On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $\dfrac{n}{3}$ soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$?

L'expérience est la suivante : on lance n fois le dé.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de "6" obtenus lors de ces n lancers.
Si on suppose le dé équilibré, et les lancers indépendants, on a X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$.

On sait donc que :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-k}$
- $\mathbb{E}[X] = n \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{n}{6}$
- $\mathbb{V}[X] = n \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5n}{36}$

L'énoncé nous demande donc quel n choisir pour que $\mathbb{P}\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

Essayons d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (possible puisque X admet bien une espérance et variance) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{5n}{36\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = n/6$, on obtient :

$$1 - \mathbb{P}\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \leqslant \frac{5n}{36\frac{n^2}{36}}$$

ou autrement dit

$$\mathbb{P}\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 1 - \frac{5}{n}$$

Il suffit donc de choisir un n tel que $1 - \frac{5}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ pour avoir l'inégalité demandée.

$$1 - \frac{5}{n} \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{5}{n} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow n \geqslant 10$$

Dès qu'on lance le dé plus de 10 fois, on est certain que la probabilité de l'événement $[0 \leqslant X \leqslant n/3]$ est supérieure à égale à $1/2$.

13.3 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR deux à deux indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre p_i.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

On voit apparaître une moyenne empirique et la présence d'une limite fait penser à une convergence en probabilité : on pense immédiatement à la Loi Faible des Grands Nombres.

Les X_i suivent chacun des loi de Bernoulli de paramètre p_i, deux à deux indépendantes. En posant $S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, on a :

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$$

et

$$\mathbb{V}[S_n] = \frac{1}{n^2}(\mathbb{V}[X_1] + \cdots + \mathbb{V}[X_n]) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k)$$

Malheureusement ici, les variables n'admettent pas tous <u>la même espérance</u> et <u>la même variance</u> (puisque les p_k sont a priori distincts) : on ne peut donc pas utiliser la Loi Faible des Grands Nombres.

Revenons à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : elle nous donne que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}[S_n]}{\varepsilon^2}$$

autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ 1 - \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| < \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}[S_n]}{\varepsilon^2}$$

ou :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}[S_n]}{\varepsilon^2}$$

et puisqu'une probabilité est toujours dans l'intervalle $[0,1]$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad 1 \geqslant \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}[S_n]}{\varepsilon^2}$$

Or,

$$|\mathcal{V}[S_n]| = \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} |p_k||1-p_k| \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1.1 = \frac{1}{n^2}n = \frac{1}{n}$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}[S_n] = 0$, et donc puisque

$$\forall \varepsilon > 0,\ 1 \geqslant \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}[S_n]}{\varepsilon^2}$$

on en déduit par encadrement également que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| < \varepsilon\right) = 1$$

13.4 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de VAR définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant toute une loi uniforme sur $[0,1]$.
On note pour tout $n \geqslant 1$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Y_n = n(1-M_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable remarquable.

Déjà, rappelons que pour tout $i \in [\![1,n]\!],\ X_i(\Omega) = [0,1]$, que la fonction de répartition des X_i est la fonction :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. On a clairement $M_n(\Omega) = [0,1]$. Alors, en notant F_{M_n} la fonction de répartition de M_n :
   - $\forall x < 0,\ F_{M_n}(x) = 0$
   - $\forall x \geqslant 1,\ F_{M_n}(x) = 1$
   - Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \dots \cap [X_n \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\mathbb{P}(X_2 \leqslant x)\cdots\mathbb{P}(X_n \leqslant x) \quad (\text{car } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ indépendantes}) \\ &= (F(x))^n \\ &= x^n \end{aligned}$$

   On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

   Remarquons que F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, donc M_n est une variable aléatoire à densité.

Puisque $M_n(\Omega) = [0,1]$, on a $(1-M_n)(\Omega) = [0,1]$, donc $\big(n(1-M_n)\big)(\Omega) = [0,n]$. Alors, en notant F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n :

- $\forall x < 0,\ F_{Y_n}(x) = 0$
- $\forall x \geqslant n,\ F_{Y_n}(x) = 1$
- Pour tout $x \in [0, n[$,

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(n(1-M_n) \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}\left(1 - M_n \leqslant \frac{x}{n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(M_n \geqslant 1 - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(M_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}\right) \quad \text{(car } M_n \text{ variable à densité)} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n[\\ 1 & \text{si } x \geqslant n \end{cases}}$$

2. Fixons-nous $x \in \mathbb{R}$ et déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.
   - Si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$ Or,

   $$n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{x}{n}\right) = -x$$

   donc par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-x}$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   et on reconnaît la fonction de répartition d'une variable suivant une loi Exponentielle de paramètre 1.

   Ainsi, la suite (Y_n) converge en loi vers une variable Z suivant une loi $\mathcal{E}(1)$.

   Remarque : on avait également

   $$\lim_{n\to+\infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

   et on reconnaît la fonction de répartition d'une variable discrète constante égale à 1.
   Ainsi, la suite (M_n) converge en loi vers une variable constante 1.

13.5 On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de Poisson indépendantes de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ? Calculer $\mathbb{P}(S_n \leqslant n)$ en fonction de n.
2. En utilisant le Théorème de la Limite Centrée, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

1. Rappelons le résultat du cours :

Théorème : soient X suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda')$, avec X, Y indépendantes. Alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$.

Preuve :

On a $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

On a $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda')$, donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda')^k}{k!}$

Notons $Z = X + Y$. On a directement $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}([X = i]\cap[Y = k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k-i) \quad \text{(car } X, Y \text{ indépendantes)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda'}\frac{(\lambda')^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-\lambda-\lambda'}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda^i(\lambda')^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\lambda')}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i(\lambda')^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\lambda')}\frac{(\lambda+\lambda')^k}{k!} \quad \text{(par Binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Et on reconnaît bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$.

Montrons par récurrence sur n que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n.

- $n = 1$: ok.
- Soit $n \geqslant 1$ et supposons que S_n suive une loi de Poisson de paramètre n. Alors

$$S_{n+1} = X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

Puisque S_n est fonction de $X_1, \ldots, X_n$, et que X_{n+1} est indépendante des autres X_i, les variables S_n et X_{n+1} sont bien indépendantes. S_n suit une loi de Poisson de paramètre n par hypothèse de récurrence et X_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre 1, donc par le théorème remontré ci-dessus, on a S_{n+1} qui suit une loi de Poisson de paramètre $n+1$.

- Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$$S_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n)$$

autrement dit $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$, on a $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{V}[S_n] = n$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \leqslant n) &= \mathbb{P}([S_n = 0] \cup [S_n = 1] \cup \cdots \cup [S_n = n]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) \quad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} \\
&= e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}
\end{aligned}$$

2. Les variables (X_i) sont des variables i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées) de loi Poisson 1, donc on sait d'après le Théorème de la Limite Centrée que :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} \quad \text{converge en loi vers une variable suivant une loi } \mathcal{N}(0,1)$$

autrement dit $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n - n \leqslant 0) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \\
&= \mathbb{P}(Z \leqslant 0) \quad \text{(avec } Z \text{ variable suivant une loi } \mathcal{N}(0,1)) \\
&= \Phi(0) \quad \text{(où } \Phi \text{ désigne la fonction de répartition de } Z\text{, suivant la loi } \mathcal{N}(0,1)) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

ou autrement dit

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$

13.6 Soit X une VAR suivant une loi de poisson de paramètre 40. Calculer $\mathbb{P}(30 < X < 40)$ et $\mathbb{P}(X = 40)$.

X suit une loi $\mathcal{P}(40)$. On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-40}\dfrac{40^k}{k!}$.

1. **Valeur exacte ?**

$$\mathbb{P}(30 < X < 40) = \mathbb{P}(31 \leqslant X \leqslant 39) = e^{-40}\sum_{k=31}^{39}\frac{40^k}{k!}$$

A l'aide d'un ordinateur, on peut calculer : on obtient environ 0.417276986.

$$\mathbb{P}(X = 40) = e^{-40}\frac{40^{40}}{40!}$$

A l'aide d'un ordinateur, on peut calculer : on obtient environ 0.06294703941.

2. **Valeur approchée ?** Puisque X suit une VAR de Poisson de paramètre 40, on sait d'après le Théorème de la Limite Centrée que la loi de $\dfrac{X-40}{\sqrt{40}}$ peut être approchée par une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On notera Φ la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

<u>Sans correction de continuité :</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(30 < X < 40) = \mathbb{P}(31 \leqslant X \leqslant 39) &= \mathbb{P}(-9 \leqslant X - 40 \leqslant -1)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{-9}{\sqrt{40}} \leqslant \frac{X-40}{\sqrt{40}} \leqslant \frac{-1}{\sqrt{40}}\right)\\
&\simeq \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{40}}\right) - \Phi\left(\frac{-9}{\sqrt{40}}\right)\\
&= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{40}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{9}{\sqrt{40}}\right) = \Phi\left(\frac{9}{\sqrt{40}}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{40}}\right)\\
&\simeq \Phi(1.42) - \Phi(0.16) \simeq 0.9222 - 0.5636 \simeq \boxed{0.3586}
\end{aligned}$$

<u>Avec correction de continuité :</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(30 < X < 40) = \mathbb{P}(30.5 \leqslant X \leqslant 39.5) &= \mathbb{P}(-9.5 \leqslant X - 40 \leqslant -0.5)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{-9.5}{\sqrt{40}} \leqslant \frac{X-40}{\sqrt{40}} \leqslant \frac{-0.5}{\sqrt{40}}\right)\\
&\simeq \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{40}}\right) - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{40}}\right)\\
&\simeq \Phi(1.50) - \Phi(0.08) \simeq 0.9332 - 0.5319 \simeq \boxed{0.4013}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 40) = \mathbb{P}(39.5 \leqslant X \leqslant 40.5) &= \mathbb{P}(-0.5 \leqslant X - 40 \leqslant 0.5)\\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{0.5}{\sqrt{40}} \leqslant \frac{X-40}{\sqrt{40}} \leqslant \frac{0.5}{\sqrt{40}}\right)\\
&\simeq 2\Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{40}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(0.08) - 1 \simeq 2\times 0.5318 - 1 = \boxed{0.0636}
\end{aligned}$$

Remarquons que l'approximation par la loi normale est plutôt cohérente puisque les résultats sont très similaires, mais la correction par continuité est nécessaire (les résultats sont très éloignés sinon).

13.7 Soit $n \geqslant 2$. On considère n variables aléatoires indépendantes $Z_1, \dots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $M_n = \dfrac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

1. Les variables Z_i suivent toutes une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Z_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et
   $$\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(Z_i = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad \mathbb{E}[Z_i] = \frac{1}{p},\ \mathbb{V}[Z_i] = \frac{1-p}{p^2}$$
   On a :
   $$\begin{aligned} m = \mathbb{E}[M_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}[Z_1] + \mathbb{E}[Z_2] + \cdots + \mathbb{E}[Z_n]\right) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{n}\left(n\mathbb{E}[Z_1]\right) \quad \text{(puisque les } Z_i \text{ suivent tous la même loi)} \\ &= \mathbb{E}[Z_1] = \frac{1}{p} \end{aligned}$$
   On a donc
   $$\boxed{m = \frac{1}{p}}$$
   $$\begin{aligned} \sigma_n^2 = \mathbb{V}[M_n] &= \mathbb{V}\left[\frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}[Z_1] + \mathbb{V}[Z_2] + \cdots + \mathbb{V}[Z_n]\right) \quad \text{(car les } Z_i \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\mathbb{V}[Z_1]\right) \quad \text{(puisque les } Z_i \text{ suivent tous la même loi)} \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{V}[Z_1] = \frac{1-p}{np^2} \end{aligned}$$
   On a donc
   $$\boxed{\sigma_n = \frac{\sqrt{1-p}}{p\sqrt{n}}}$$
2. Les variables Z_i suivant toutes une même loi et étant indépendantes, le théorème de la Limite Centrée affirme que la variable $\dfrac{M_n - \mathbb{E}[M_n]}{\mathbb{V}[M_n]}$ converge en loi vers une variable suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
   Ainsi,
   $$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(0 \leqslant \frac{M_n - m}{\sigma_n} \leqslant 1\right) \simeq \Phi(1) - \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} 2dx$$

13.8 Chaque année, un jeune employé effectue, deux fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une VAR X qui suit une loi d'espérance 45 minutes et d'écart-type 10 minutes. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes.
Quelle est la probabilité pour que ce jeune employé passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année ?
(On donne $\dfrac{21\,000 - 460 \times 45}{\sqrt{46\,000}} \simeq 1.4$)

Le jeune employé effectue donc au total $2 \times 5 \times 46 = 460$ trajets dans l'année.
Notons pour tout i X_i la durée du i-ième trajet en voiture effectué par le jeune employé ($i \in [\![1, 460]\!]$)
On sait que chaque X_i suit une loi d'espérance 45 et d'écart-type 10
Notons $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{460}$. On a par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_{460}] = 460 \times \mathbb{E}[X_1] = 460 \times 45 = 20700$$

et par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_{460}$:

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_{460}] = 460 \times \mathbb{V}[X_1] = 460 \times 100 = 46000$$

Puisque les X_i suivent toutes la même loi et sont indépendantes, le théorème de la Limite Centrée nous dit qu'on peut approcher la loi de $\dfrac{Y - \mathbb{E}[Y]}{\sqrt{V[Y]}} = \dfrac{Y - 20700}{\sqrt{46000}}$ par une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$
Notons Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.
Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geqslant 350 \times 60) &= \mathbb{P}(Y \geqslant 21000) \\
&= \mathbb{P}(Y - 20700 \geqslant 21000 - 460 \times 45) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 20700}{\sqrt{46000}} \geqslant \frac{21000 - 460 \times 45}{\sqrt{46\,000}}\right) \\
&\simeq 1 - \Phi(1.4) \\
&\simeq 1 - 0.9192 \\
&= 0.0808
\end{aligned}$$

13.9 Un dé régulier est lancé 9 000 fois. Déterminer la probabilité de l'événement "On a obtenu "6" entre 1400 et 1600 fois".
A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité demandée et commenter le résultat.
On donne $\dfrac{100}{\sqrt{1250}} \simeq 2.83$ et $\dfrac{100.5}{\sqrt{1250}} \simeq 2.84$.

1. On lance un dé régulier 9 000 fois. Notons X le nombre de fois où on a obtenu "6" au cours de ces 9 000 lancers. On nous demande

$$\mathbb{P}(1400 \leqslant X \leqslant 1600)$$

On sait que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(9\,000, \dfrac{1}{6}\right)$

Donc $X(\Omega) = [\![0, 9\,000]\!]$ et $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{9000}{k}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k \left(\dfrac{5}{6}\right)^{9000-k}$.

On a $\mathbb{E}[X] = 9000 \times \dfrac{1}{6} = 1500$ et $\mathbb{V}[X] = 9000 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = 1250$

Valeur exacte ? $\mathbb{P}(1400 \leqslant X \leqslant 1600) = \sum\limits_{k=1400}^{1600} \binom{9000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{9000-k}$: difficilement calculable.

(L'ordinateur donne comme valeur approchée : $\boxed{0.9955251517}$)

Valeur approchée ? Puisque n est assez grand ($n > 30$), on applique le théorème de la Limite Centrée. On sait que $\dfrac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{V}[X]}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Sans correction de continuité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(1400 \leqslant X \leqslant 1600\right) &= \mathbb{P}\left(-100 \leqslant X - 1500 \leqslant 100\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{100}{\sqrt{1250}} \leqslant \frac{X - 1500}{\sqrt{1250}} \leqslant \frac{100}{\sqrt{1250}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{1250}}\right) - \Phi\left(-\frac{100}{\sqrt{1250}}\right) \quad \text{(où } \Phi \text{ fonction de répartition loi } \mathcal{N}(0,1)) \\
&\simeq 2\Phi\left(2.83\right) - 1 \\
&\simeq 2 \times 0.9977 - 1 = \boxed{0.9954}
\end{aligned}$$

Avec correction de continuité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(1400 \leqslant X \leqslant 1600\right) &= \mathbb{P}\left(1399.5 \leqslant X \leqslant 1600.5\right) \mathbb{P}\left(-100.5 \leqslant X - 1500 \leqslant 100.5\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{100.5}{\sqrt{1250}} \leqslant \frac{X - 1500}{\sqrt{1250}} \leqslant \frac{100.5}{\sqrt{1250}}\right) \\
&\simeq 2\Phi\left(2.84\right) - 1 \\
&\simeq 2 \times 0.9977 - 1 = \boxed{0.9954}
\end{aligned}$$

Ici, remarquons que la correction de continuité n'apporte pas grand chose de plus.

2. Essayons d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Elle nous dit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0,\ 1 - \mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - \varepsilon \leqslant X \leqslant \mathbb{E}[X] + \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

ou encore :

$$\mathbb{P}\left(1500 - \varepsilon \leqslant X \leqslant 1500 + \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1250}{\varepsilon^2}$$

Avec $\varepsilon = 100$, on trouve alors :

$$\mathbb{P}(1400 \leqslant X \leqslant 1600) \geqslant 1 - \frac{1250}{10000} = 1 - 0.1250 = 0.8750$$

Avec la valeur trouvée ci-dessus, on voit bien que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est vérifiée, mais que la minoration donnée est très grossière et imprécise.