11.1 Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t\ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$?
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^2(n)}$.
4. Déterminer de même la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$, $(\beta>1)$.

11.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

On pose pour tout entier $n\geqslant 1$, $I_n=\displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et la calculer.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge.

11.3 Déterminer les natures des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{\ln(n)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^2}{e^n}$ à l'aide de comparaisons à des intégrales.

11.4 Etudier les convergences des suites définies par :

1. $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$
2. $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$
3. $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$
4. $u_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

11.5 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\ln(1+x)+e^x$
2. $g(x)=e^x\ln(1+x)$
3. $h(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$
4. $u(x)=\ln(1+x+x^2)$
5. $v(x)=(1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$
6. $w(x)=\ln(1+\cos(x))$
7. $y(x)=\mathrm{Arctan}(x)$
8. $z(x)=e^{\mathrm{Arcsin}(x)}$

11.6 Déterminer le développement limité en 0 de $\ln(1+e^{-x})$ à l'ordre 4. En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

11.7 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x+1)-x\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin(x)}{\cos(x)-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-1-x\cos(x)}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{x-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^3+x)^{1/3}-(x^3-x)^{1/3}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}$

11.8 Soit $f: x\mapsto x+\ln(1+x)$.

1. Montrer que f admet au voisinage de 0 une fonction réciproque et que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Calculer ce développement limité.

11.9 On pose $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[, f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.