01.1

1. Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /2x + y - z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base et la dimension.

2. Montrer que que $E = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \ / \ P(1) = P'(1) = 0\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et en déterminer une base.

3. Montrer que $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \ / \ \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /2x + y - z = 0\}$.
Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   - $E \subset \mathbb{R}^3$ par définition.
   - $(0, 0, 0) \in E$ puisque $2 \times 0 + 0 - 0 = 0$, donc $E \neq \emptyset$
   - Soient (x, y, z) et $(x', y', z') \in E$, i.e. on a $2x + y - z = 2x' + y' - z' = 0$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. <u>Montrons que $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') \in E$.</u> En effet, $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et

   $$\begin{aligned} 2\left(\lambda x + x'\right) + \left(\lambda y + y'\right) - \left(\lambda z + z'\right) &= \lambda\left(2x + y - z\right) + \left(2x' + y' - z'\right) \\ &= \lambda 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, E est bien stable par combinaison linéaire.

   Ainsi, on a bien que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En particulier, c'est un espace vectoriel.

   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

   $$\begin{aligned} (x, y, z) \in E &\Longleftrightarrow 2x + y - z = 0 \\ &\Longleftrightarrow z = 2x + y \\ &\Longleftrightarrow (x, y, z) = (x, y, 2x + y) \\ &\Longleftrightarrow (x, y, z) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) \\ &\Longleftrightarrow (x, y, z) \in Vect((1, 0, 2), (0, 1, 1)) \end{aligned}$$

   Ainsi, $E = Vect((1, 0, 2), (0, 1, 1))$. Comme les deux vecteurs engendrant E sont non colinéaires, ils forment une famille libre : c'est donc une base de E. On en déduit que $\dim(E) = 2$.

   Remarque : le fait d'écrire E sous la forme d'un Vect fournit directement une preuve comme quoi E est bien un espace vectoriel, puisqu'on l'écrit comme un sous-espace vectoriel engendré par une partie de $\mathbb{R}^3$

2. Soit $E = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \ / \ P(1) = P'(1) = 0\}$.
Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$.

   - $E \subset \mathbb{C}_n[X]$ par définition.
   - Le polynôme nul 0 est dans E puisqu'il s'annule en 1 et sa dérivée également, donc $E \neq \emptyset$
   - Soient P et $Q \in E$, i.e. on a $P(1) = P'(1) = Q(1) = Q'(1) = 0$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. <u>Montrons que $\lambda P + Q \in E$.</u> En effet, $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda 0 + 0 = 0$.
   De plus, $(\lambda P + Q)'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = \lambda 0 + 0 = 0$.
   Ainsi, E est bien stable par combinaison linéaire.

   Ainsi, on a bien que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$. En particulier, c'est un espace vectoriel.

Déterminons une base de E.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in E &\iff P(1) = P'(1) = 0 \\ &\iff 1 \text{ est racine au moins double de } P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{C}_{n-2}[X] \ / \ P(X) = (X-1)^2 Q(X) \\ &\iff \exists a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{C} \ / \ P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \\ &\iff P \in Vect((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2, \dots, X^{n-2}(X-1)^2) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $E = Vect((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2, \dots, X^{n-2}(X-1)^2)$. Or, les polynômes intervenant dans la famille génératrice de E sont tous de degrés étagés, donc forment une famille libre dans $\mathbb{C}_n[X]$. Ainsi, c'est une base du sous-espace vectoriel E. Remarquons que $\dim(E) = n-1$.

3. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \ / \ \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

   Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   - $E \subset \mathcal{C}^0([0,1])$ par définition.
   - La fonction nulle est bien dans E puisque $\displaystyle\int_0^1 0dt = 0$, donc $E \neq \emptyset$
   - Soient f et $g \in E$, i.e. on a $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = 0$.
     Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g \in E$. En effet,

     $$\int_0^1 (\lambda f + g)(t)dt = \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = \lambda 0 + 0 = 0$$

     insi, E est bien stable par combinaison linéaire.

   Ainsi, on a bien que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1])$. En particulier, c'est un espace vectoriel.

01.2 Soient les applications $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x, x+y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, 2x-y+3z) \end{array}$.
Démontrer que f et g sont des applications linéaires.
Déterminer leur noyau, leur image, leur rang.
Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Déterminer leur matrice dans les bases canoniques.

1. Etudions l'application :

   $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x, x+y) \end{array}$$

   Montrons que f est linéaire.
   Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$\begin{aligned} f\left(\lambda(x,y) + (x',y')\right) &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y'\right) \\ &= \left(\lambda x + x' - (\lambda y + y'), \lambda x + x', \lambda x + x' + \lambda y + y'\right) \\ &= \left(\lambda(x-y) + (x'-y'), \lambda x + x', \lambda(x+y) + (x'+y')\right) \\ &= \lambda\,(x-y, x, x+y) + (x'-y', x', x'+y') \\ &= \lambda f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

   Ainsi, l'application f est bien linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Déterminons la matrice de f dans les bases canoniques.

On calcule les images de la base canonique par f. On a :

$$f(1,0) = (1-0, 1, 1+0) = (1,1,1), \qquad f(0,1) = (0-1, 0, 0+1) = (-1,0,1)$$

La matrice de f est donc la matrice dont les colonnes sont les vecteurs précédents :

$$mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'image, le noyau, le rang.
On écrit la matrice A et l'identité I et on échelonne la matrice A à l'aide d'opérations sur les colonnes :

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

On voit donc directement que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = Vect((1,1,1),(0,1,2))$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
On a $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc f est bien injective.
On a $\mathrm{rg}(f) = 2$, or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on a donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective, et donc pas bijective.

2. Etudions l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, 2x-y+3z) \end{array}$$

Montrons que g est linéaire.
Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} g\left(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')\right) &= g\left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right) \\ &= \left(\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z', 2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + 3(\lambda z + z')\right) \\ &= \left(\lambda(x+y+z) + x' + y' + z', \lambda(2x - y + 3z) + 2x' - y' + 3z'\right) \\ &= \lambda\left(x+y+z, 2x-y+3z\right) + \left(x'+y'+z', 2x'-y'+3z'\right) \\ &= \lambda g(x,y,z) + g(x',y',z') \end{aligned}$$

Ainsi, l'application g est bien linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Déterminons la matrice de g dans les bases canoniques.

On calcule les images de la base canonique par g. On a :

$$g(1,0,0) = (1,2), \qquad g(0,1,0) = (1,-1), \qquad g(0,0,1) = (1,3)$$

La matrice de g est donc la matrice dont les colonnes sont les vecteurs précédents :

$$mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'image, le noyau, le rang.

On écrit la matrice A et l'identité I et on échelonne la matrice A à l'aide d'opérations sur les colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\Longrightarrow}{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\Longrightarrow}{C_3 \leftarrow 3C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On voit donc directement que $\mathrm{Ker}(f) = Vect\,((-4,1,3))$ et $\mathrm{Im}(f) = Vect((1,2),(0,-3))$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On a $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective et ne sera donc pas bijective.

On a $\mathrm{rg}(f) = 2$, or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, on a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, donc f est surjective.

01.3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de A. Qu'en déduire ?
2. Calculer $(A-I)(A+3I)$. En déduire A^{-1}.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I$.
4. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.
   En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n, puis A^n.

1. Déterminons le rang de A. Pour cela échelonnons la matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow 2C_3 - C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   On voit que la matrice obtenue par opérations élémentaires est de rang 3 puisque échelonnée en zéros. La matrice est donc inversible, puisqu'ici on travaille en dimension 3.

2. On calcule, on a :

$$(A-I)(A+3I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On a donc $(A-I)(A+3I) = 0$, autrement dit, $A^2 + 3A - A - 3I = 0$, i.e. $A^2 + 2A - 3I = 0$

$$A\,(A + 2I) = 3I$$

   Ainsi,

$$A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I$$

   Ainsi, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I.$$

3. Montrons la formule par récurrence :
   Soit $\mathcal{P}(n)$: "$\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \;/\; A^n = u_n A + v_n I$".

- **Initialisation**.
  $n = 0$, on a $A^0 = I = 0A + 1I$.
  $n = 1$, on a $A^1 = A = 1A + 0I$.
  On a donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ qui sont vraies.
- **Hérédité**.
  Soit $n \geqslant 1$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Montrons qu'alors, la propriété est également vraie au rang $n+1$.
  $$A^{n+1} = A^n \times A \overset{HR}{=} (u_nA + v_nI) \times A = u_nA^2 + v_nA = u_n(-2A + 3I) + v_nA = (-2u_n + v_n)A + 3u_nI$$
  Si on pose $u_{n+1} = -2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$, on a bien trouvé deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I$. Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.
- **Conclusion**.
  Par récurrence, la propriété est bien vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente, on a les relations suivantes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$
Ainsi, la suite (u_n) vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = -2u_n + 3u_{n-1}$$
On reconnaît donc une suite récurrente linéaire double. L'équation caractéristique est
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
qui admet deux solutions $x = 1$ et $x = -3$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b3^n$$
Or, on a $u_0 = 0 = a + b$ et $u_1 = 1 = a + 3b$, donc $b = 1/2$ et $a = -1/2$. Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n$$
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = 3u_{n-1} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}3^n$$

01.4 Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P - P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.
3. Soit $Q = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$. Trouver l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ tel que $f(P) = Q$.

1. Montrons que f est un endomorphisme, i.e. que f est linéaire et a mêmes ensembles de départ et d'arrivée.
   - Par définition, f est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $f(P) = P - P'$ qui est bien un polynôme, et $\deg(f(P)) \leqslant \max(\deg(P), \deg(P')) \leqslant \deg(P) \leqslant n$.
     Ainsi, f va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   - Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
     $$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q) - (\lambda P + Q)' = \lambda P + Q - \lambda P' - Q' = \lambda(P - P') + (Q - Q') = \lambda f(P) + f(Q)$$
     donc f est bien linéaire.

On a donc montré que f était une application linéaire.

Pour déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, il nous faut calculer les images de la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$:

$$f(1) = 1, \quad f(X) = X - 1, \quad f(X^2) = X^2 - 2X, \quad f(X^3) = X^3 - 3X^2, \quad \ldots \quad f(X^n) = X^n - nX^{n-1}$$

On complète donc la matrice en la remplissant par colonne.

$$A = mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & (0) \\ & 1 & -2 & & & \\ & & 1 & -3 & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & -n \\ (0) & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Pour montrer que f est automorphisme, il faut montrer que :
   – f est un endomorphisme
   – f est bijectif
   Il ne nous manque donc que la bijectivité de f.
   Or, la matrice A de f dans la base canonique est triangulaire et ne comporte aucun zéro sur sa diagonale : c'est une matrice inversible. On en déduit donc que f est une application bijective directement.

   Il nous faut déterminer f^{-1}.
   Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$.
   On a donc
   $$\begin{cases} P - P' = Q \\ P' - P'' = Q' \quad \text{(on dérive)} \\ P'' - P''' = Q'' \quad \text{(on re-dérive)} \\ \vdots \\ P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)} \end{cases}$$
   Sachant que $\deg(P) \leqslant n$, on a $P^{(n+1)} = 0$. En sommant toutes ces équations, on trouve donc que
   $$P = Q + Q' + Q'' + \cdots + Q^{(n)}$$
   Ainsi, on a
   $$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ f^{-1}(Q) = Q + Q' + Q'' + \cdots + Q^{(n)}}$$

3. Soit $Q = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$. On cherche $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $f(P) = Q$.
   On applique notre formule précédente, puisqu'on doit avoir $P = f^{-1}(Q)$.
   On a $Q = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$.
   On a $Q' = 8X^3 - 12X^2 + 6X + 1$.
   On a $Q'' = 24X^2 - 24X + 6$. On a $Q^{(3)} = 48X - 24$. On a $Q^{(4)} = 48$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} P &= Q + Q' + Q'' + Q^{(3)} + Q^{(4)} \\ &= (2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6) + (8X^3 - 12X^2 + 6X + 1) + (24X^2 - 24X + 6) + (48X - 24) + 48 \\ &= 2X^4 + (-4 + 8)X^3 + (3 - 12 + 24)X^2 + (1 + 6 - 24 + 48)X + (-6 + 1 + 6 - 24 + 48) \\ &= \boxed{2X^4 + 4X^3 + 15X^2 + 31X + 25} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{01.5}}$ Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes. Si ce n'est pas possible, déterminer le rang des matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Dans le cours, on a fait l'exemple avec les opérations sur les lignes, faisons le ici avec des opérations <u>uniquement sur les colonnes</u>.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_2 \leftarrow 2C_2 - 7C_1 \\ C_3 \leftarrow 2C_3 - 3C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} & C_3 \leftarrow 3C_3 - C_2 & \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 18 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_1 \leftarrow 6C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow 2C_2 - C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & -12 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2 & \begin{pmatrix} -28 & -12 & -2 \\ 20 & 6 & -2 \\ -24 & -6 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_1 \leftarrow \frac{1}{12}C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{-1}{6}C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{6}C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow 2C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow 2C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow 2C_4 - C_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On voit directement que la matrice équivalente contient deux colonnes identiques : la matrice B ne sera donc pas inversible. Inutile de continuer les calculs sur la matrice I à droite.

On continue les opérations à gauche, pour échelonner au maximum afin de trouver le rang :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array}$$

On a donc obtenue une matrice échelonnée : on voit directement que le rang de la matrice B est de 3.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow 2C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow 2C_4 - C_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & -8 & -16 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow 7C_3 + 2C_2 \\ C_4 \leftarrow 7C_4 - 3C_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

On voit directement que la matrice équivalente contient deux colonnes proportionnelles : la matrice C ne sera donc pas inversible. Inutile de continuer les calculs sur la matrice I à droite.

On continue les opérations à gauche, pour échelonner au maximum afin de trouver le rang :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 18 & 0 \\ 1 & 3 & -8 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3$$

On a donc obtenue une matrice échelonnée : on voit directement que le rang de la matrice C est de 3.

4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit directement que la matrice équivalente contient une colonne nulle, et deux colonnes proportionnelles : la matrice D ne sera donc pas inversible. Inutile de continuer les calculs sur la matrice I à droite.

On continue les opérations à gauche, pour échelonner au maximum afin de trouver le rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 + 22C_2$$

On a donc obtenue une matrice échelonnée : on voit directement que le rang de la matrice D est de 2.

01.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Montrer que :

1. $$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

2. $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

1. Montrons que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
On veut montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$: on montre par double inclusion.
$\boxed{\supset}$: ok. En effet, 0 est toujours dans $\mathrm{Im}(f)$ et dans $\mathrm{Ker}(f)$, donc on a toujours $\{0\} \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
$\boxed{\subset}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$: on a $f(x) = 0$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$: il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
Alors $f(f(y)) = 0$, soit, $f^2(y) = 0$. Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Donc $f(y) = 0$, autrement dit $x = 0$.
Ainsi, on a bien montré que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
On veut montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$: onmontre par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a donc $f(x) = 0$. Alors (en composant des deux côtés par f), on a $f^2(x) = f(0) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
$\boxed{\supset}$: Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, on a donc $f^2(x) = 0$, soit $f(f(x)) = 0$.
Ainsi, on voit que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ et on a aussi $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Ainsi, $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrons que

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
On veut montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$: on montre par double inclusion.
$\boxed{\supset}$: ok. En effet, on a toujours $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \subset E$
$\boxed{\subset}$. Soit $x \in E$. Cherchons à utiliser l'hypothèse sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
La seule chose qu'on connaît dans $\mathrm{Im}(f)$ est $f(x)$. On sait donc que $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$. Ainsi,

$$\exists y \in E \ / \ f(x) = f^2(y)$$

Ainsi, $f(x) - f^2(y) = 0$, donc $f\left(x - f(y)\right) = 0$, autrement dit $x - f(y) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Ainsi, si on écrit $x = (x - f(y)) + f(y)$, on a écrit $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
On veut montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$: onmontre par double inclusion.
$\boxed{\supset}$: Soit $x \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe donc $y \in E$ tel que $x = f^2(y) = f\left(f(y)\right)$, donc $x \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe donc $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Mais on sait que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$, donc on peut écrire $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(f)$: $y_2 = f(z_2)$ avec un $z_2 \in E$. Ainsi

$$x = f(y) = f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2) = 0 + f(f(z_2)) = f^2(z_2) \in \mathrm{Im}(f^2)$$

On a donc montré que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

01.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id = 0$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 3Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

On veut montrer que tout élément x de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f-3Id_E)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

Condition nécessaire.
Soit $x \in E$. Supposons qu'on ait déjà la décomposition $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$. Alors, on aurait

$$(f - 3Id_E)(x) = (f - 3Id_E)(y) + (f - 3Id_E)(z) = f(z) - 3z$$

Autrement dit, puisque $f(z) = 2z$, on aurait $f(x) - 3x = -z$.
Ainsi, on n'a pas beaucoup de possibilités pour z, il faut nécessairement que $\boxed{z = 3x - f(x)}$.
Et alors, puisque $x = y + z$, on a pas non plus énormément de possibilités pour y, il faut nécessairement que $y = x - z = x - (3x - f(x)) = \boxed{f(x) - 2x}$.
On voit directement que si la décomposition existe, elle est <u>UNIQUE</u>.

Condition suffisante.
Soit $x \in E$. On écrit

$$x = (f(x) - 2x) + (3x - f(x))$$

Cette égalité est toujours bien vraie. De plus,

$$(f - 3Id_E)(f(x) - 2x) = f^2(x) - 2f(x) - 3f(x) + 2x = (f^2 - 5f + 6Id_E)(x) = 0$$

et

$$(f - 2Id_E)(3x - f(x)) = 3f(x) - f^2(x) - 6x + 2f(x) = -(f^2 - 5f + 6Id_E)(x) = 0$$

Donc on a bien montré qu'on avait $x \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$.

01.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul vérifiant $f^2 = 0$.

1. Déterminer le rang de f et la dimension de son noyau.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ici, on a $\dim(E) = 3$. Donc on sait que $\underline{\mathrm{rg}(f) \in [\![0,3]\!]}$.
   On sait que $f^2 = 0$, autrement dit $f \circ f = 0$. Ainsi, nécessairement $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   On sait donc que $\underline{\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))}$.
   Or, d'après le Théorème du rang, on sait aussi que $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.
   Il n'y a donc pas beaucoup de possibilités :
   – $\mathrm{rg}(f) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$: impossible puisque $f \neq 0$.
   – $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$: possible
   – $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$: impossible car on doit avoir $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$
   – $\mathrm{rg}(f) = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}[f)) = 0$: impossible car on doit avoir $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$
   On a donc
   $$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}, \qquad \boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2}$$

2. **Condition nécessaire.**
   Examinons un peu la matrice de f. Si cette base (e_1, e_2, e_3) existe, on doit avoir les relations suivantes :
   $$f(e_1) = 0, \qquad f(e_2) = 0, \qquad f(e_3) = e_1$$
   Ainsi, on doit prendre $\underline{e_1 \in \mathrm{Ker}(f)}$, on doit prendre $\underline{e_2 \in \mathrm{Ker}(f)}$ et $\underline{e_1 \in \mathrm{Im}(f)}$ avec $\underline{e_1 = f(e_3)}$

   Condition suffisante.
   On a $\mathrm{rg}(f) = 1$: on peut donc écrire $\mathrm{Im}(f) = Vect(e_1)$ avec e_1 un vecteur non nul.
   Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a donc bien $\boxed{e_1 \in \mathrm{Ker}(f)}$.
   Comme $e_1 \in \mathrm{Im}(f)$, on peut écrire $\boxed{e_1 = f(e_3)}$ pour un certain $e_3 \in E$. On a $e_3 \neq 0$ (car sinon on aurait $f(e_3) = 0$ impossible).
   Pour l'instant on a $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et comme $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2, on utilise le Théorème de la Base Incomplète : on peut compléter par un vecteur $e_2 \in E$ de telle sorte que (e_1, e_2) soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$, donc $\boxed{e_2 \in \mathrm{Ker}(f)}$.
   Vérifions que la famille (e_1, e_2, e_3) ainsi formée est bien une base de E. Puisqu'on a trois vecteurs et qu'on est en dimension 3, il suffit de vérifier que c'est une famille libre de E.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que
   $$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$
   Alors en composant par f, sachant que $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$, on obtient $0 + 0 + \lambda_3 e_1 = 0$.
   Puisque $e_1 \neq 0$, on a nécessairement $\lambda_3 = 0$.
   Ainsi, en revenant à l'identité de départ, on a $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.
   et comme la famille (e_1, e_2) est libre puisque c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, on a directement que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   En conclusion, on a donc montré qu'on avait une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$, autrement dit la matrice de f dans cette base est bien la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

01.9 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$. En déduire une CNS pour que A soit inversible, et calculer A^{-1} dans ce cas.
2. En déduire que tout puissance n-ième de A peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I et A.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$. Donc

   $$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I = \begin{pmatrix} (a^2+bc)-(a+d)a+(ad-bc) & b(a+d)-(a+d)b \\ c(a+d)-(a+d)c & (bc+d^2)-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On a donc
   $$A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)I$$
   soit
   $$A\left(A-(a+d)I\right) = -(ad-bc)I$$
   Donc A est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$ et dans ce cas
   $$A^{-1} = \frac{-1}{ad-bc}\left(A-(a+d)I\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

2. Par récurrence sur n.
   Pour $n=0$, on a $A^0 = I = 0A + 1I$.
   Pour $n=1$, on a $A^1 = A = 1A + 0A$.
   Pour $n=2$, on a donc $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$.

   Soit $n \geqslant 2$. Supposons que A^n puisse s'écrire $\alpha A + \beta I$. Alors
   $$A^{n+1} = A \times A^n = A \times (\alpha A + \beta I) = \alpha A^2 + \beta A = \alpha((a+d)A-(ad-bc)I) + \beta A = (\alpha(a+d)+\beta)\,A - \alpha(ad-bc)I$$
   et on a donc bien A^{n+1} qui est une combinaison linéaire également de A et I.
   Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n peut s'écrire comme une combinaison linéaire de A et I.