Exercice

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

et

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

1. Calculer u_0, u_1, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + u_{n-1}$
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

   $$x \longmapsto a + be^{-x} + ce^{-2x}$$

   où a, b, c étant trois paramètres réels quelconques.
   Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
4. A toute fonction g de E, on associe la fonction $g_1 = \varphi(g)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \int_0^1 \frac{g(t+x)}{1+e^{-t}}dt$$

   Montrer que l'application φ ainsi définie est un endomorphisme de E.
   L'application φ est-elle bijective ? diagonalisable ?