Le devoir comporte deux exercices et un problème qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 3 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Exercice 1

On considère l'application

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & (1+X^2)P''(X) - 2XP'(X) \end{array}\right.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Justifier que f_n, la restriction de f à E_n, est un endomorphisme de E_n.
2. Soit A la matrice de f_n dans la base canonique de E_n.
   Déterminer A.
   On écrira en détail les cinq premières colonnes de A et la dernière.
3. Déterminer le rang et le noyau de f_n.
4. Préciser les valeurs propres de f_n.
5. L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de A*, et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de la matrice A, autrement dit :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. (a) Montrer que l'application trace :

$$\mathrm{Tr} : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}\right.$$

   est une application linéaire.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
2. Soit l'application :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & -A + \mathrm{Tr}(A)I \end{array}\right.$$

   où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que f est un automorphisme.
   (b) Supposons que λ soit une valeur propre de f. Montrer que nécessairement, on a $\lambda = -1$ ou $\lambda = n-1$.
   (c) Montrer que -1 et $n-1$ sont effectivement des valeurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Problème (d'après HEC 2004)

Partie A

On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

(i) tous les termes a_n sont des réels de l'intervalle $[0,1]$,

(i) la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge,

(ii) la somme de la série vaut : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

2. Dans cette question (seulement), on suppose que la fonction f est dérivable au point 1, autrement dit, elle vérifie :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(1)$$

(a) Établir pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ l'égalité :

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$$

(b) En déduire que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant f'(1)$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$$

En déduire que la série de terme général na_n est convergente.

(d) À l'aide des résultats des questions (a) et (c), justifier pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$, les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$$

(e) En déduire la valeur de la some $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n$.

3. Dans cette question (seulement), on suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n$ converge.

(a) Justifier la croissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ et montrer qu'elle vérifie, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1[$, la double inégalité suivante :

$$0 \leqslant \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$$

(b) En déduire que la fonction f est dérivable en 1 et qu'elle vérifie :

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$$

4. *Cas particulier :* on suppose dans cette question, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = p(1-p)^{n-1}$$

(a) Vérifier que la suite (a_n) définie ci-dessus vérifie bien les conditions (i), (ii) et (iii) de l'énoncé.

(b) Donner, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, une expression de $f(x)$ en fonction de x ne comportant pas de somme de série.

(c) Montrer que f est dérivable en 1, préciser $f'(1)$ et déterminer ainsi la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ après avoir justifié la valeur de la somme.

Partie B

On considère dans cette partie une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}\left(1 - u_{n-2}\right) \end{cases}$$

On admettra que tous les termes de la suite sont des éléments de $[0,1]$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et convergente. Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Préciser les nombres v_1, v_2, v_3, v_4.
   (b) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 3$, v_{n+1} en fonction de v_n et de v_{n-2}.
   (c) En déduire pour tout entier N supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :
   $$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k$$
   (d) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme.

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $c_n = v_{n-1} - v_n$. On admettra que :

- tous les termes de la suite (c_n) sont dans $[0,1]$,
- la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n$ converge,
- la somme de la série vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = 1$

7. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$ la série de terme général $c_n x^n$ converge.

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$$

8. (a) Établir que pour tout $x \in [0,1]$:
   $$h(x) = (x-1)g(x) + x$$
   (b) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$, le quotient $\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$ en fonction de $g(x)$.
   (c) Justifier la croissance de la fonction g et, pour tout entier naturel N non nul et tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1]$, la double inégalité suivante :
   $$\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leqslant g(x) \leqslant g(1)$$
   (d) En déduire la relation suivante :
   $$\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$$
   (e) Montrer que h est dérivable au point 1 et, à l'aide de la Partie A, en déduire que la série de terme général nc_n converge et que sa somme est égale à 8.