CHAPITRE 10

Approximation en analyse

10.1 Approximation Sommes/Intégrales

10.1.1 Sommes de Riemann

Proposition 1 ***Lien entre intégrale et aire***

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$.
Alors l'aire (en unités d'aires) comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Définition 2

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).
On partage cet intervalle $[a, b]$ en n segments de longueur identique, à savoir de longueur $\dfrac{b-a}{n}$.
On génère ainsi une **subdivision** $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ avec :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Remarque :

On a $x_0 = a$ et $x_n = b$

Théorème 3 ***Sommes de Riemann***

Si f est <u>continue</u> sur le segment $[a, b]$, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad = \quad \int_a^b f(t)dt}$$

et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad = \quad \int_a^b f(t)dt}$$

Remarques :

R 1 – Pour appliquer la formule des sommes de Riemann, il faut déterminer le nombre de rectangles (le nombre de termes dans la somme), les valeurs de a et b et l'expression de la fonction f (continue sur $[a, b]$).

R 2 – Cas particuliers importants : si $[a, b] = [0, 1]$, alors si f est une fonction continue sur $[0, 1]$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt}$$

Exemple :

Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

On a directement que $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. On reconnaît donc une Somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0, 1]$ pour la subdivision régulière de $[0, 1]$ en n segments. La fonction f étant continue sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$

10.1.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 4

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.
Alors, la série $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration :

Comme la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a pour tout $k \geqslant 1$,

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

Donc pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt$$

autrement dit pour tout $k \geqslant 1$,

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

En sommant ces inégalités, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, la première inégalité donne que la série $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ converge.
Si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge, la deuxième inégalité donne que la série $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ diverge.

Théorème 5 ***Séries de Riemann***

Soit α un réel. Alors

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Démonstration :

Cela provient de la comparaison série-intégrale et de la convergence des intégrales de Riemann.

10.2 Formules de Taylor

10.2.1 Formule de Taylor Polynôme

Théorème 6 ***Formule de Taylor-Polynôme***

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ (i.e. de degré $\leqslant n$) et soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

autrement dit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Remarques :

R 1 – Un cas particulier : si $a = 0$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Autrement dit, les coefficients d'un polynôme P sont en réalité les dérivées successives de P en 0 divisés par des factorielles

R 2 – Ce théorème va nous servir pour essayer d'"approcher" une fonction de classe suffisante par un polynôme

10.2.2 Formule de Taylor Reste Intégral

Théorème 7 ***Formule de Taylor-Reste Intégral***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Remarque :

Ce théorème n'est pas à retenir, il sera TOUJOURS redonné à démontrer dans les exercices/problèmes l'utilisant. Sa preuve est donc à connaître et n'est pas très compliquée, il suffit de faire une récurrence et une intégration par parties

Démonstration :

Pour $n = 0$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On veut montrer que

$$\forall a, b \in I,\ f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)dt = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

Or, cette formule est bien vraie, car puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.
La formule est donc bien vérifiée au rang $n = 0$.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété soit vraie si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
Prenons à présent f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. En particulier, elle est aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, donc on

peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, à savoir la propriété au rang n : Pour a et b dans I,

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Faisons une intégration par parties dans l'intégrale qui apparaît dans la formule.
Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v'(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$.
On a $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$ et $v(t) = -\dfrac{1}{n+1}\dfrac{(b-t)^{n+1}}{n!} = \dfrac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, u est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
De plus, v est un polynôme, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
On peut donc bien utiliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[f^{(n+1)}(t)\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt\end{aligned}$$

En reportant dans la formule précédente, on obtient alors la propriété au rang $n+1$.
Par récurrence, la formule est donc bien montrée pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :

Prenons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x > 0$, en appliquant la formule à f entre 0 et x, on a :

$$\exp(x) = \exp(0) + \frac{\exp'(0)}{1!} + \cdots + \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)dt$$

Or, puisque $\forall k \geqslant 0,\ \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$, on a donc :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp(t)dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp(t)dt$$

On a alors, puisque $\forall t \in [0,x]$, $e^t \leqslant e^x$

$$\begin{aligned}\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| \\ &\leqslant \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\right| dt \\ &\leqslant e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

On en déduit donc par passage à la limite la formule de la série exponentielle :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)}$$

10.3 Développements limités

10.3.1 Développement limité en 0

Définition 8

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que f **admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0** s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

autrement dit, f s'écrit localement comme la somme de :
- un polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, appelé la **partie régulière du DL**
- une fonction négligable devant x^n : $o(x^n)$, appelé le **reste du DL**

Remarque :

On peut aussi définir le développement limité au voisinage de n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 9

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est définie au voisinage de x_0, on dit que f **admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0** s'il existe $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Théorème 10

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, alors la partie régulière de ce développement limité est unique.

10.3.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 11 ***Formule de Taylor-Young***

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)}$$

Remarque :

Le plus souvent, on utilise ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)}$$

Proposition 12

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + o((x-x_0)^n)$$

Alors, on a nécessairement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$.
De plus, au voisinage de x_0, f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité : c'est-à-dire que si p est tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $a_k = 0$ et $a_p \neq 0$, alors, on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

10.3.3 DL usuels

Théorème 13 ***DL usuels <u>AU VOISINAGE DE</u> 0***

Les DL usuels suivants existent d'après le Théorème de Taylor-Young. Il faut les apprendre par coeur.

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})}$$

10.3.4 Opérations sur les DL

Proposition 14

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant chacune un développemenbt limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

1. *Alors $f+g$ admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivante :*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

2. *Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemple :

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{e^x}{1+x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 15

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n que l'on obtient effectuant $Q \circ P$ et en ne gardant que les termes de dégré inférieur ou égal à n.

Exemple :

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\
&= e\times\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\
&= e\times\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right)\\
&= e\left(1+\frac{1}{2}x+o(x^2)\right)\\
&= e+\frac{e}{2}x+o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 16

Lorsqu'on veut faire le développement limité d'un quotient, on se sert d'une composée avec le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ *ou* $\dfrac{1}{1-x}$.

Exemples :

E 1 – Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\
&= 1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2+o(x^2)\\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

E 2 – Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)+\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^2-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^3\right)+o(x^3)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{5}{64}x^3\right)+o(x^3)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}-\frac{5}{128}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

10.3.5 Comportement local et DL

Proposition 17

Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0,

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$$

alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc le terme $y = a + b(x - x_0)$ et pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

Exemple :

Calculons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1 + 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3\right) + o(x^3) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{4}}_{\text{eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$.

De plus, on a $f(x) - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$, donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{48}$.
Pour $x < 0$, la courbe est en-dessous de la tangente, et pour $x > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.