CHAPITRE 9

Révisions d'analyse

9.1 Limites et continuité en un point

Définition 1

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est définie au voisinage de ce point et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ (|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est définie au voisinage de ce point. Alors

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty} \iff \forall A > 0\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ (|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A)$$

- Si f est définie au voisinage de $+\infty$, et si $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ (x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

- Si f est définie au voisinage de $+\infty$, alors

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty} \iff \forall A > 0\ \exists B > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ (x > B \Longrightarrow f(x) > A)$$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in D_f$.
On dit que **f est continue en x_0** si

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$$

Remarque :

> Lorsqu'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage d'un point x_0, mais n'est pas définie en x_0,
>
> $$\text{mais si on a } \ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$
>
> on dit alors que f est **prolongeable par continuité** en x_0 en posant "$f(x_0) = \ell$", autrement dit, la fonction suivante est continue :
>
> $$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} D_f \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

9.2 Continuité sur un intervalle

Théorème 3 — ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.
Si $f(a) \leqslant f(b)$, alors

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists x \in [a,b] \ / \ y = f(x)$$

Si $f(b) \leqslant g(a)$, alors

$$\forall y \in [f(b), f(a)], \quad \exists x \in [a,b] \ / \ y = f(x)$$

Proposition 4

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et croissante.
Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- *Si $I = [a,b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$*
- *Si $I = [a,b[$, alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$*
- *Si $I =]a,b]$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)]$*
- *Si $I =]a,b[$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$*

Remarque :

> Si f est continue et décroissante, on fait de même de même en échangeant les deux bornes de $f(I)$.

Théorème 5 — ***Continuité sur un segment***

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
Alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.

Théorème 6 — ***Théorème de la bijection***

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.
Alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$.
De plus, sa bijection réciproque est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

9.3 Dérivabilité

Définition 7

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in D$. On dit que la fonction f est **dérivable en x_0** si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie}$$

Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en x_0**, noté $f'(x_0)$.

Remarques :

R 1 – On a donc

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

R 2 – Une fonction f est dérivable sur l'intervalle I si elle est définie sur I et si elle est dérivable en tout point x_0 de I.

R 3 – Graphiquement, une fonction est dérivable en x_0 si sa courbe représentative admet une tangente NON VERTICALE au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est alors

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Proposition 8 ***Dérivée d'une composée***

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

autrement dit

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Théorème 9

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective de l'intervalle I sur l'intervalle J. On note $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Plus précisément, f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$ et on a alors :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

Proposition 10

Soit f une fonction dérivable sur I. Alors
- *f croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I*
- *f décroissante sur $I \iff f' \leqslant 0$ sur I*
- *f constante sur $I \iff f' = 0$ sur I*
- *f strictement croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ et f' s'annule en au plus un nombre fini de points de I*
- *f strictement décroissante sur $I \iff f' \leqslant 0$ et f' s'annule en au plus un nombre fini de points de I*

Définition 11

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On dit que f **admet un minimum local en** x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
On dit que f **admet un maximum local en** x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.

Proposition 12

SI f est une fonction dérivable sur I et soit $x_0 \in I$, x_0 n'étant pas une borne de l'intervalle I.
1. *Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.*
2. *Si f possède un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 13 — ***Théorème de Rolle***

*Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 14 — ***Théorème des Accroissements Finis***

*Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Théorème 15 — ***Inégalité des accroissements finis***

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
1. *S'il existe m et M deux réels tels que $\forall x \in]a,b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors*
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$
2. *S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leqslant k$, alors*
$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$$

Remarque :

> Résultat souvent important pour l'étude de suites récurrentes

Théorème 16 — ***Théorème limite de la dérivée***

*Soit I un intervalle et soit $a \in I$.
Si f est une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, si f' admet une limite finie ℓ en a, alors f est également dérivable sur I et $f'(a) = \ell$.*

9.4 Convexité

Définition 17

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un ensemble I.

- On dit que la fonction f est **convexe sur I** si la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.
- On dit que la fonction f est **concave sur I** si la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes en tout point de I.

Remarque :

> Un point où la courbe représentative de f traverse sa tangente (i.e. f change de convexité en ce point) est appelé un **point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$**

Proposition 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux-fois dérivable sur un ensmeble I.

- *f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0$*
- *f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0$.*

Théorème 19 ***Inégalités de convexité***

On a par convexité/concavité les inégalités suivantes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1}, \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) \leqslant x-1}, \qquad \boxed{\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x}$$

9.5 Primitives d'une fonction continue

Définition 20

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Proposition 21

Soit f une fonction définie sur I et soit F une primitive de f.
Alors, l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Proposition 22

Soit f une fonction définie sur I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 23

Soit f une fonction continue sur I. Alors f admet au moins une primitive sur I.

Proposition 24

Tableau des primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)\ (+k \in \mathbb{R})$	I
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}, n \leqslant -2)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$ *ou* $\mathbb{R}^{-*}$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^{+*}$ *ou* $\mathbb{R}^{-*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\left]\dfrac{-\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arccos(x)$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque :

En général, si on veut faire apparaître une primitive connue, on a affaire à une primitive "par composition".

- Si $f(x) = u'(x)(u(x))^n\ (n \in \mathbb{N})$, alors $F(x) = \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + k$.
- Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, alors $F(x) = \ln(\lvert u(x)\rvert) + k$
- Si $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$, alors $F(x) = e^{u(x)} + k$
- etc ...

9.6 Intégrale sur un segment

Dans toute cette partie, on a $a < b$.

Définition 25

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a,b]$. On appelle **intégrale de f de a à b** le nombre réel :

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - f(a)$$

Remarque :

> On peut également définir l'intégrale pour toute fonction fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ en sommant les intégrales sur chaque "morceau" de $[a,b]$ où f est continue

Théorème 26

Soit f une fonction continue sur un intervalle I soit $a \in I$. On considère la fonction

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

Alors F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui vérifie $F' = f$.
F est donc l'unique primitive de F sur I qui s'annule en x_0.

Exemple :

> Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose
>
> $$f(x) = \int_{x+1}^{2x^2} \ln(t)^2 dt$$
>
> Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculons f'.
>
> On pose pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)^2 dt$.
> Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut dire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
> De plus, $\forall x > 0$,
>
> $$f(x) = \int_{x+1}^{1} \ln(t)^2 dt + \int_1^{2x^2} \ln(t)^2 dt = F(2x^2) - F(x+1)$$
>
> Comme les fonctions F, $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto 2x^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, par composée et somme, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On sait de plus que $\forall x > 0,\ F'(x) = \ln(x)^2$. On a donc
>
> $$\forall x > 0,\ f'(x) = 4xF'(2x^2) - F'(x+1) = 4x\ln(2x^2)^2 - \ln(x+1)^2$$

Proposition 27 — ***Linéarité de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues (par morceaux) sur $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Proposition 28 — ***Positivité de l'intégrale***

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

$$\textit{Si } \forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0, \qquad \textit{Alors } \int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

Remarque :

> En particulier, si on a $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$ pour f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, alors on a
>
> $$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

Proposition 29

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

Théorème 30

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$.

9.7 Calcul d'intégrales

Théorème 31 ***Intégration par parties***

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Théorème 32 ***Changement de variables***

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ avec $\varphi([\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Alors, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarque :

> **METHODE GENERALE.**
> On cherche à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
>
> - On trouve le changement de variable qui nous semble judicieux, c'est-à-dire $t = \varphi(u)$.
>   On prendra toujours en pratique φ bijective de telle sorte que $u = \varphi^{-1}(u)$.
> - On cherche les nouvelles bornes : α et β : $\varphi(u) = a \Leftrightarrow u = \alpha$, et $\varphi(u) = b \Leftrightarrow u = \beta$
> - On vérifie que φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$
> - On calcule $\varphi'(t)$ pour $t \in [\alpha,\beta]$ pour écrire $dt = \varphi'(u)du$.
> - On remplace alors dans l'intégrale pour ne plus faire apparaître de t :
>
> $$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$