CHAPITRE 4

Séries numériques

4.1 Généralités sur les séries

4.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'indice n** associée à la suite (u_n) : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On appelle alors **série de terme général u_n**, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de ces sommes partielles.

Définition 2

- On dit que **la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge** si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

  La limite de cette suite est alors appelée la **somme de la série**, qu'on note : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Définition 3

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, on appelle pour tout $n \in \mathbb{N}$, le **reste d'indice n** R_n :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarques :

R 1 – Déterminer la nature d'une série signifie qu'il faut déterminer si la série est convergente ou divergente.

R 2 – Si la série est convergente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

R 3 – Si la série est convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

R 4 – Il ne faut pas confondre les différents éléments de l'étude d'une série :
- u_n : la suite de base, le "terme général" de la série
- S_n : la somme partielle des u_k : c'est $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
- $\sum_{n\geqslant 0} u_n$: c'est la série, c'est la suite (S_n)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est la somme de la série, la limite de (S_n) si elle existe.

R 5 – Puisque $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ et $S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Exemple :

Soit q un réel quelconque. Soit (u_n) la suite géométrique définie par

$$u_n = q^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de la suite (u_n) est égale à

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Regardons si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, i.e. si la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite.

- Si $q = 1$, on a

$$S_n = n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc dans ce cas là, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = 1$.

- Si $q = -1$, on a

$$S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ?$$

donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = -1$

- Si $q > 1$, on a

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque $-q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $1 - q < 0$, donc dans ce cas là, (S_n) diverge, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q > 1$.

- Si $q < -1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ?$$
donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q < -1$
- Si $-1 < q < 1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$$
puisque $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc dans ce cas là, (S_n) converge et admet pour limite $\frac{1}{1-q}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge dans le cas où $-1 < q < 1$ et dans ce cas là
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

4.1.2 Propriétés

Proposition 4
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge nécessairement vers 0.

Démonstration :

On a dit précedemment que
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$
Si la série converge, cela veut dire que la suite (S_n) converge. Notons par exemple ℓ la limite de la suite (S_n). On a alors :
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, \qquad S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
et donc
$$u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$$

Remarques :

R 1 – On utilise souvent cette propriété dans le sens inverse :

SI (u_n) ne converge pas vers 0, ALORS la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

R 2 – La réciproque de cette propriété est FAUSSE.
Si la suite (u_n) converge vers 0, on ne peut pas affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemple :

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Notons pour tout $n\geqslant 1$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Il s'agit de montrer que la suite (S_n) diverge.

La fonction $f : t\mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Si on se fixe un entier $k\geqslant 1$, on a donc

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{k}$$

et même pour tout $t\in[k,k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}$$

On a donc

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dt\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt$$

autrement dit

$$\frac{1}{k+1}\left(k+1-k\right)\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leqslant\frac{1}{k}\left(k+1-k\right)$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leqslant\frac{1}{k}$$

Soit $n\geqslant 1$. Puisqu'on a pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{k+1}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leqslant\frac{1}{k}$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt=\int_1^2\frac{dt}{t}+\int_2^3\frac{dt}{t}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}=\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}$ d'après la relation de Chasles.
De plus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{\ell=2}^{n+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{\ell}-1$.
On a donc montré que pour tout $n\geqslant 1$,

$$S_{n+1}-1\leqslant\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant S_n$$

autrement dit

$$S_{n+1}-1\leqslant\ln(n+1)\leqslant S_n$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$. On en déduit par comparaison que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, ainsi la suite (S_n) diverge vers $+\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n}$ diverge donc.

4.1.3 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 5

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *deux séries.*

1. *Pour tout réel* λ *non nul, les séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ *sont de même nature. De plus, si les séries convergent, on a :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
2. *Si les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont convergentes, alors la série* $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ *est convergente également et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque :

La réciproque de la deuxième propriété est fausse !
On peut avoir $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ qui converge, sans que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent.

4.1.4 Liens entre suite et série

Proposition 6

Soit (u_n) *une suite réelle, alors*

$$(u_n) \text{ converge} \iff \sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge}$$

De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty}(u_n-u_0)$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Supposons que la suite (u_n) converge. Calculons la somme partielle d'indice n de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0$$
Comme la suite (u_n) converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$, on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - u_0 = \lim_{n\to+\infty} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n-u_0)$$
Ainsi la série converge bien et sa somme vaut $\lim_{n\to+\infty}(u_n-u_0)$.

$\Longleftarrow$ Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge, autrement dit la somme partielle de la série converge vers un réel ℓ'. Or,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0$$

autrement dit,

$$u_{n+1} = S_n + u_0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell' + u_0$$

Ainsi, la suite (u_n) converge bien.

4.2 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Dans toute cette partie, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est à termes positifs, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

4.2.1 Sommes partielles

Proposition 7

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles est une suite croissante.

Démonstration :

En effet, si on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0,$$

donc la suite (S_n) est bien croissante.

Théorème 8

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées. Si la série diverge, alors elle diverge nécessairement vers $+\infty$.

4.2.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 9 *Théorème de comparaison*

Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries telles qu'à partir d'un certain rang, on ait

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Alors :

- *Si $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ diverge.*

Théorème 10 ***Théorème de négligeabilité***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles qu'on ait*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Alors :

- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Théorème 11 ***Théorème d'équivalence***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles qu'on ait*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*

4.2.3 Règle de D'Alembert

Théorème 12

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes* *<u>strictement positifs</u>.*

1. *Si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$, *alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1$, *alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente grossièrement vers* $+\infty$

<u>Démonstration :</u>

1. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$. Alors si on se fixe $q \in]\ell, 1[$, on sait que

$$\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant q u_{n-1} \leqslant q^2 u_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant q^{n-N} u_N$$

Or, $\sum_{n\geqslant N} q^{n-N} u_N$ converge (série géométrique de raison $|q| < 1$), donc $\sum_{n\geqslant N} u_n$ converge, donc également $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

2. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1$. Alors si on se fixe $q \in]1, \ell[$, on sait que

$$\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant q u_{n-1} \geqslant q^2 u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant q^{n-N} u_N$$

Or, $\sum_{n\geqslant N} q^{n-N} u_N$ diverge grossièrement (série géométrique de raison $q > 1$), donc $\sum_{n\geqslant N} u_n$ diverge, donc également $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque :

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, a priori on ne peut rien dire, parfois la série converge, parfois la série diverge. Il faudra alors appliquer un autre critère.

4.2.4 Convergence absolue

Dans ce paragraphe, on n'impose plus à ce que la suite (u_n) soit positive.

Définition 13

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. On dit que la série **converge absolument** si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 14

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes quelconques.
Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, ALORS, elle est aussi convergente.

Démonstration :

En effet, si on regarde les sommes partielles : on sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Alors, si le terme de droite converge lorsque $n \to +\infty$ (i.e. la série converge absolument), alors le terme de gauche sera majoré, donc la série ne va pas diverger.

Remarques :

R 1 – La réciproque est fausse, ici également.
Par exemple, dans l'exercice 03.3, nous avons montré que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ convergeait.
Or, $\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ diverge.
On peut donc avoir des séries convergentes, qui ne convergent pas absolument.

R 2 – Si une série $\sum u_n$ n'est pas de signe constant, alors on regarde $\sum |u_n|$ qui elle, est une série à termes positifs : on peut appliquer les critères de comparaison.
Si cette série $\sum |u_n|$ converge, alors on peut dire que $\sum u_n$ converge.
Si cette série $\sum |u_n|$ diverge, alors on ne peut a priori rien dire sur $\sum u_n$

4.3 Séries de référence

4.3.1 Séries géométriques et dérivées

Théorème 15

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ s'appelle la ***série géométrique de raison*** q*. Alors*

$$\sum_{n \geqslant 0} q^n \text{ converge } \iff |q| < 1$$

et alors si $|q| < 1$, on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

Proposition 16

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ s'appelle la* ***série géométrique dérivée première de raison*** q*. On a*

$$\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1} \text{ converge } \iff |q| < 1$$

et si $|q| < 1$, on a alors :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}}$$

- *La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle la* ***série géométrique dérivée seconde de raison*** q*. On a*

$$\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2} \text{ converge } \iff |q| < 1$$

et si $|q| < 1$, on a alors :

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$

4.3.2 Séries exponentielles

Théorème 17

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

4.3.3 Séries de Riemann

Théorème 18

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *quelconque. Alors la série* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est appelée la* ***série de Riemann d'ordre*** α*. Alors*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

En particulier, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$*, appelée la* ***série harmonique****, diverge.*

En particulier, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$*, converge (vers* $\frac{\pi^2}{6}$ *...)*